和と差の積の公式を使って２次関数を標準形に変形する方法

川口東高等学校　　元吉　隆夫

和と差の積の公式を利用して、２次関数を標準形へ変形する指導法について考察する。ａ＋ｂの２乗の展開公式を使う方法よりも１つ１つの計算のステップが簡単で、数学に苦手意識を持つ生徒からも、わかりやすいと言う声が多く聞かれた。

○変形法の紹介

例１から**例**３に、実際の授業での板書内容を、分解写真やパラパラまんがのように順番に並べてみた。

例１　$y = x^2 + 6x$

分解写真　１コマ目

$$y = x^2 + 6x$$
$$= x(x+6)$$

共通因数xで括る。

２コマ目

$$y = x^2 + 6x$$
$$= x(x+6)$$
$$= (\qquad)(\qquad)$$

２個の長めの括弧を書く。

３コマ目

$$y = x^2 + 6x$$
$$= x(x+6)$$

６を半分に分ける

$$= (\qquad)(x+3+3)$$

右側の括弧の中に$x+6$の６の所を半分に分けた式、$x+3+3$を書く。

４コマ目

$$y = x^2 + 6x$$
$$= x(x+6)$$

$x+0$　　６を半分に分ける

$$= (x+3-3)(x+3+3)$$

最後の項の符号を変えて$x+3-3$とすれば、xと等しくなるので、これを左の括弧の中に書く。

５コマ目

$$y = x^2 + 6x$$
$$= x(x+6)$$

$x+0$　　６を半分に分ける

$$= (\underbrace{x+3}-3)(\underbrace{x+3}+3)$$
$$= (\underbrace{x+3})^2 - 3^2$$
$$= (x+3)^2 - 9$$

括弧の中の２項めまでをひとまとまりと考えれば「和と差の積」の形をしているので、公式$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$より。

例２　$y = x^2 - 8x + 11$

分解写真 １コマ目

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 8x + 11 \\ &= x(x-8) + 11 \end{aligned}$$

２コマ目

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 8x + 11 \\ &= x(x-8) + 11 \\ &= (\qquad)(\qquad) + 11 \end{aligned}$$

３コマ目

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 8x + 11 \\ &= x(x-8) + 11 \end{aligned}$$

－８を半分に分ける

$$= (\qquad)(x - 4 - 4) + 11$$

４コマ目

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 8x + 11 \\ &= x(x-8) + 11 \end{aligned}$$

$x + 0$　－８を半分に分ける

$$= (x - 4 + 4)(x - 4 - 4) + 11$$

５コマ目

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 8x + 11 \\ &= x(x-8) + 11 \end{aligned}$$

$x + 0$　－８を半分に分ける

$$\begin{aligned} &= (x - 4 + 4)(x - 4 - 4) + 11 \\ &= (x-4)^2 - 4^2 + 11 \\ &= (x-4)^2 - 5 \end{aligned}$$

例３　$y = -2x^2 + 8x + 3$

分解写真 １コマ目

$$\begin{aligned} y &= -2x^2 + 8x + 3 \\ &= -2x(x-4) + 3 \end{aligned}$$

２コマ目

$$\begin{aligned} y &= -2x^2 + 8x + 3 \\ &= -2x(x-4) + 3 \\ &= -2(\qquad)(\qquad) + 3 \end{aligned}$$

３コマ目

$$\begin{aligned} y &= -2x^2 + 8x + 3 \\ &= -2x(x-4) + 3 \end{aligned}$$

－４を半分に分ける

$$= -2(\qquad)(x - 2 - 2) + 3$$

４コマ目

$$\begin{aligned} y &= -2x^2 + 8x + 3 \\ &= -2x(x-4) + 3 \end{aligned}$$

$x + 0$　－４を半分に分ける

$$= -2(x - 2 + 2)(x - 2 - 2) + 3$$

５コマ目

$$\begin{aligned} y &= -2x^2 + 8x + 3 \\ &= -2x(x-4) + 3 \end{aligned}$$

$x + 0$　－４を半分に分ける

$$\begin{aligned} &= -2(x - 2 + 2)(x - 2 - 2) + 3 \\ &= -2\left\{(x-2) - 2^2\right\} + 3 \\ &= -2(x-2)^2 + 8 + 3 \\ &= -2(x-2)^2 + 11 \end{aligned}$$

○従来の一般的な方法との比較

(1) $(a+b)^2$の展開公式ではなく、和と差の積の公式を使う。

一般的な変形では、$(a+b)^2$の展開公式にもとづき、$x^2+2kx+k^2$の形をつくって$(x+k)^2$に変形していくので、難しいと感じる生徒が多い。

これに対して今回の方法では、交叉項(cross term)がないぶん$(a+b)^2$より簡単な、和と差の積の公式を用いており、使い方も単に展開するだけであるので、ずっと分かりやすくなる。ただし、３項×３項の展開なので、事前に$(a+b+c)(a+b-c)$の展開を復習したり、ひとまとまりになる部分を強調したりする必要がある。

(2) 後の計算を考えて、予めそれを打ち消す逆の操作をするというような考え方をしない。

$(a+b)^2$の展開公式を使うやり方では$(x+k)^2=x^2+2kx+k^2$を考えて

①$2kx$の２を打ち消すために予めxの係数を半分にする操作をし、

②$+k^2$を消すために予めk^2を引いておく

というような「後の計算のことを考えて予めそれを打ち消す操作をやっておく」という手続きがある。

一方、今回取り上げた方法では

①分解写真３コマ目でxの係数を半分に分ける操作をし、

②５コマ目で「和と差の積は２乗引く２乗」の計算をするときに「引く２乗」が出てくるので

「後の計算を考えて予めそれを打ち消す操作をやっておく」という考え方は全く出てこない。

(3) 標準形変形のための新しい公式を使わない。

(2)のような分かりづらさを回避するため

$$x^2+mx=\left(x+\frac{m}{2}\right)^2-\left(\frac{m}{2}\right)^2 \quad や \quad ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

のような公式を用いる方法があるが、これらの式はなかなか定着しない。

(4)少し難しい２次式の変形ががわかりやすくなる。

・例３のようにx^2の係数が１でない場合、一般的なやり方では$-2x^2+8x+3=-2(x^2-4x)+3$という変形を行うが、これがなかなかできない生徒が多い。これに対し、例３の１コマ目

$$\begin{aligned}y&=-2x^2+8x+3\\&=-2x(x-4)+3\end{aligned}$$

は、ずっと抵抗が少なく、自然に計算できる。

・$y=x^2+5x+1$のような式ではなかなか分数に気がつかない生徒もいるが、今回の方法のように、「５を半分に分けると？」と問いかければ比較的容易に$\frac{5}{2}$に気がつく。

$$\begin{aligned}y&=x^2+5x+1\\&=x(x+5)+1\\&\qquad\text{５を半分に分ける}\\&=(\qquad\qquad)\left(x+\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\right)+1\end{aligned}$$

○実際に授業でこの方法を使ってみて気づいたこと

(1) 例２の１コマ目の

$$x^2 - 8x + 11 = x(x-8) + 11$$

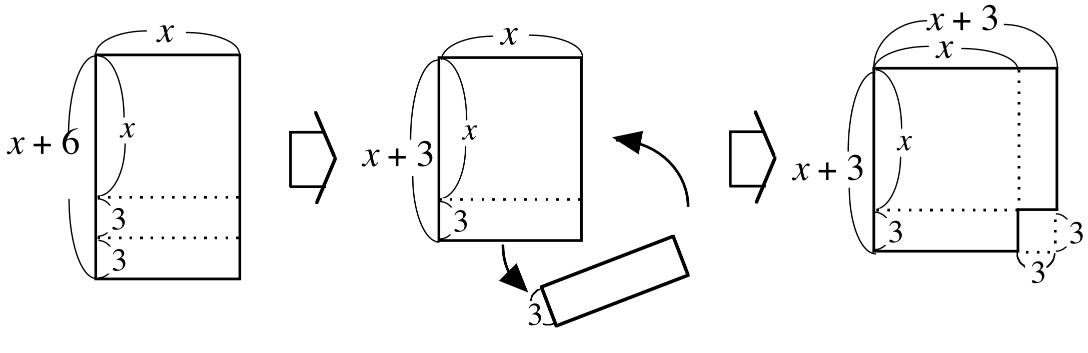
という計算は、一般的な変形方法に慣れている人からは、多少奇異に思われるかもしれない。しかし、平方完成や因数分解の問題においてこういう誤答がよく見受けられることからも分かるように、生徒にはこの変形が分かりづらいとか不自然という感覚は全くないようである。これ以降も悩むような箇所はあまり見られず、、一度しっかり教えたうえで、はじめの方の問題を穴埋め式にする等の工夫をすれば、２次関数のグラフの練習プリントにどんどん取り組んでいた。

(2) **例２**の $y = x^2 - 8x + 11$ を標準形にする問題の場合、多くの教科書の解答は

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 8x + 11 \\ &= (x-4)^2 - 4^2 + 11 \\ &= (x-4)^2 - 5 \end{aligned}$$

となっている。$(a+b)^2$ の展開公式を使う変形でもいくつかの異なる方法があり、また前述のような公式を使って指導する人もいるので、どの方法にも対応できるように１行目と２行目の間は書いていないのだと思われる。**例２**の解答についても「教科書の解答の１行目と２行目の間を詳しく補って解説したのだ」と見ることができ、板書と教科書を見比べて生徒が戸惑うようなことにはならない。

(3) $x(x+6) = (x+3)^2 - 3^2$ という変形は、下のような図を使って説明することもできる。



○最後に

面倒な計算をしていると思われるかもしれないが、慣れ親しんでいないというだけで、前に行った考察のように、本当は $(a+b)^2$ の展開公式を使う変形法の枠組みのほうが複雑なのである。実際に授業を行えば、この方法の簡潔さは、すぐに気づいていただけると思う。２次関数の指導で何か新しい切り口はないかと思っている方は、是非今回の方法をいろいろにアレンジして使うことを検討していただきたい。