ベ　ク　ト　ル

第１節　ベクトル

◎ベクトル

・重さ、長さのように「大きさ」だけで決まる量 ⇨ ふつうの数(実数)

ベクトルに対して

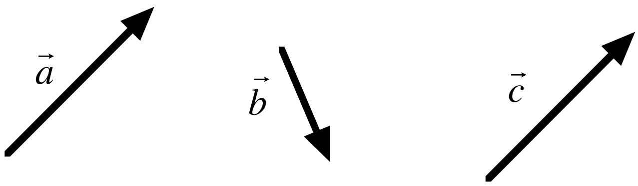
$\boxed{\qquad\qquad}$ という

・速度、力、風のように「$\boxed{\qquad}$」と「$\boxed{\qquad}$」で決まる量 ⇨ ベクトル

ふつうの数を文字で表すときは、a, b, x 等を用いるが、

ベクトルを文字で表すときは、$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{x}$ 等を用いる。

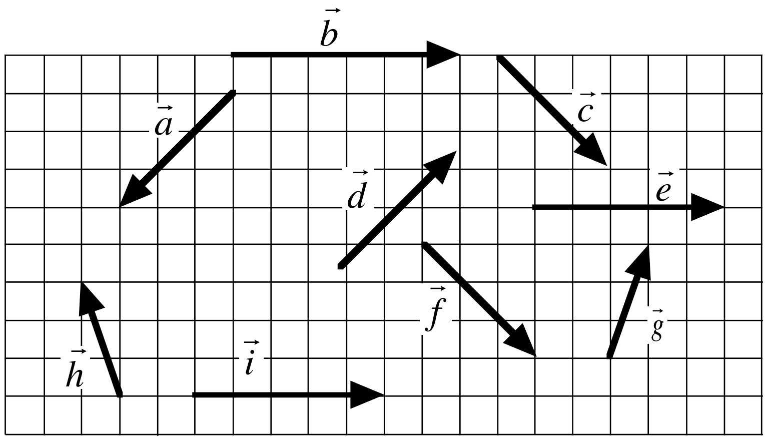
「向き」と「大きさ」を同時に表現するために、矢の付いた線分(有向線分)を使ってベクトルを示すことが多い。



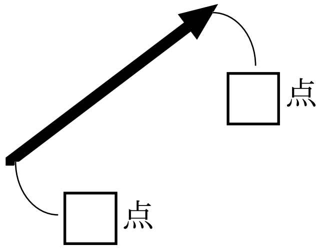
上の図のいちばん左側といちばん右側のような、平行移動したらピッタリ一致する２本の有向線分は、「向き」も「大きさ」もまったく同じであるので、同じベクトルを表していることになる。

$$\vec{a} = \vec{c}$$

問１　互いに等しいベクトルはどれか。



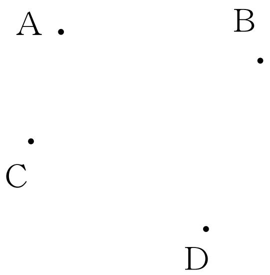
有向線分の矢がついていないほうの端を「□点」、矢がついているほうの端を「□点」という。

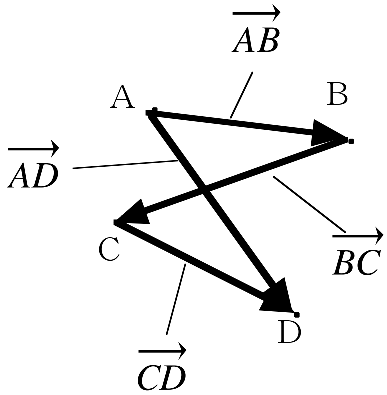


始点がA、終点がBの有向線分の表すベクトルを $\overrightarrow{AB}$ 、

始点がC、終点がDの有向線分の表すベクトルを $\overrightarrow{CD}$ などとかく。

例　左図のように４点A，B，C，Dがあるとすると

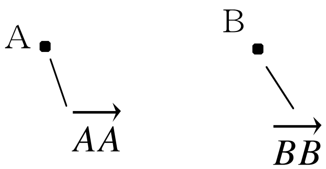




「始点と終点が同じ点Aである有向線分」は、点Aだけからなる図形である。
同じように
「始点と終点が同じ点Bである有向線分」は、点Bだけからなる図形である。

これらの有向線分が表すベクトル $\overrightarrow{AA}$ と $\overrightarrow{BB}$ は、いずれも大きさが０になる。
このような、大きさが０のベクトルを「□」といい、記号□で表す。

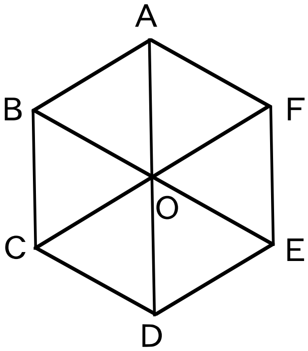
零ベクトルはみな、互いに等しいと考える。



$$\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$$

零ベクトル…大きさは０、向きは考えない

問２　図のような正六角形ＡＢＣＤＥＦの中心をＯとする。$\square$ 内に適当なアルファベットを入れよ。　　　　　　　　（教科書p.43 例１　問１）



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\square\square} = \overrightarrow{\square\square} = \overrightarrow{\square\square}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{\square\square} = \overrightarrow{\square\square} = \overrightarrow{\square\square}$$

「有向線分」と「ベクトル」は同じものではない

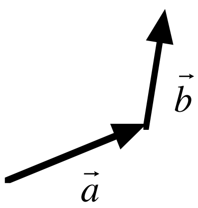
・小学校低学年で、おはじきやタイルを使って、１，２，３，…といった数の説明をするが、「数」と「おはじきやタイル」は同じものではない。

・もっと学年が進むと、数直線を使って、数の説明をするが、「数」と「数直線上の点」は同じものではない。

上の例と同様に、有向線分を使うと向きと大きさが同時に決まって便利だから、有向線分でベクトルを表すのであり、これらは同じものではない。そこで、厳密には「この有向線分の表すベクトル」という言い方をする必要がある。

◎ベクトルの和

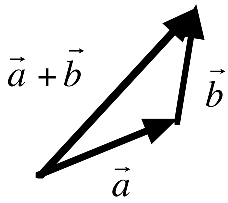
ベクトル $\vec{a}$ を表す有向線分の終点と、ベクトル $\vec{b}$ を表す有向線分の始点とが一致しているとき、



「$\vec{a}$ を表す有向線分の始点」を始点とし、
「$\vec{b}$ を表す有向線分の終点」を終点とする新たな有向線分を考える。

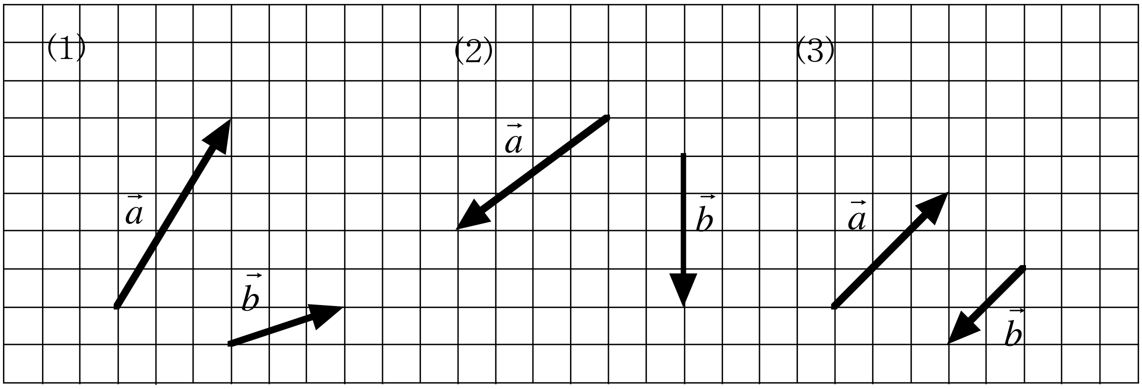
この有向線分の表すベクトルを「$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の $\square$」といい、

$\boxed{}$ と書き表す。



「 $\vec{a}$ を表す有向線分」と「 $\vec{b}$ を表す有向線分」がこのような位置関係にないときは、「有向線分を平行移動してもその表すベクトルは変わらない」という性質を利用して、どちらかあるいは両方の有向線分を平行移動して、「 $\vec{a}$ を表す有向線分の終点」と「 $\vec{b}$ を表す有向線分の始点」を一致させればよい。

問 3 $\vec{a}+\vec{b}$ を表す有向線分をかけ。 （教科書p.44 問 2）



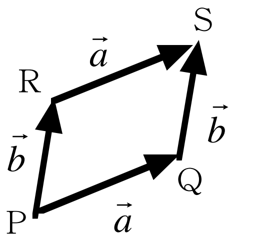
ベクトルの和の性質

[1] $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

[2] $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$

[3] $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

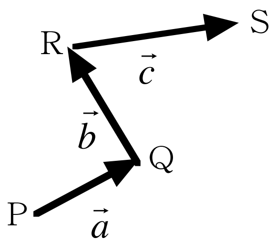
[1]が成り立つ理由



$\vec{a}+\vec{b}$ も $\vec{b}+\vec{a}$ も

$\overrightarrow{PS}$ に等しい

[2]が成り立つ理由

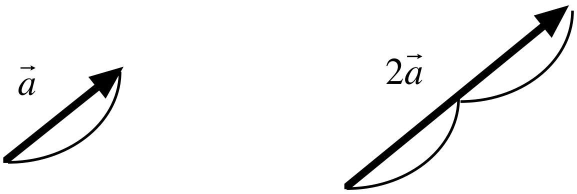


$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$ も $\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ も

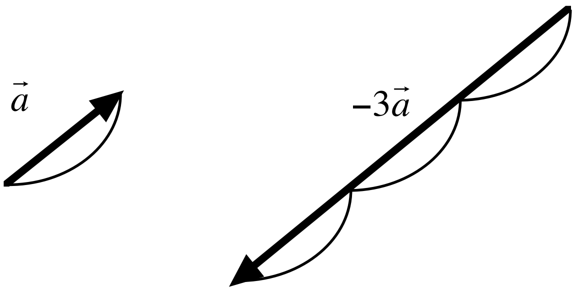
$\overrightarrow{PS}$ に等しい

◎ベクトルの実数倍

例１ $\vec{a}$ と同じ向きで大きさが２倍のベクトルを、「$\vec{a}$ の２倍」といい、
$2\vec{a}$ と書く。



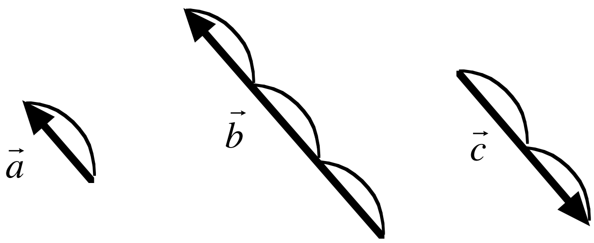
例２ $\vec{a}$ と逆向きで大きさが３倍のベクトルを、「$\vec{a}$ の－３倍」といい、
$-3\vec{a}$ と書く。



一般に、ベクトル $\vec{a}$ のk倍、$k\vec{a}$ とは

$$\left.\begin{array}{lll} \text{(i)}\ k>0 \text{ のとき} & \vec{a} \text{ と同じ向きで、大きさが } \vec{a} \text{ の} k \text{倍のベクトル} \\ \text{(ii)}\ k<0 \text{ のとき} & \vec{a} \text{ と逆向きで、大きさが } \vec{a} \text{ の } |k| \text{ 倍のベクトル} \\ \text{(iii)}\ k=0 \text{ のとき} & \text{零ベクトル} \end{array}\right\} \text{のこと。}$$

問４ $\square$ 内に、適当な実数を入れよ。



$\vec{b} = \square\,\vec{a}$

$\vec{c} = \square\,\vec{a}$

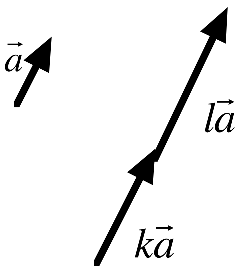
$\vec{a} = \square\,\vec{b}$

$\vec{c} = \square\,\vec{b}$

ベクトルの和と実数倍について、次のような２種類の分配法則が成立する。

$$[4]\ (k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$$
$$[5]\ k\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = k\vec{a} + k\vec{b}$$
k, lは実数

[4]が成り立つ理由



「$\vec{a}$ のk倍」と「$\vec{a}$ のl倍」の和は $\vec{a}$ と同じ向きで、大きさが $\vec{a}$ の $(k+l)$ 倍のベクトルになるから

$$k\vec{a} + l\vec{a} = (k+l)\vec{a}$$

[5]が成り立つ理由

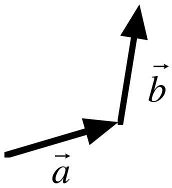


図　１

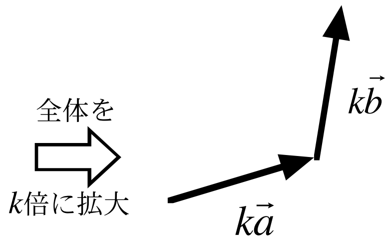


図　２

図１と図２を比較すると、$k\vec{a} + k\vec{b}$ は $\vec{a} + \vec{b}$ と同じ向きで、大きさが $\vec{a} + \vec{b}$ の k倍であることがわかるから

$$k\vec{a} + k\vec{b} = k\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$$

また、ベクトルの実数倍の定義より、次のような一種の結合法則が成立することがわかる。

$$[6]\ k\left(l\vec{a}\right) = (kl)\vec{a} \qquad k, l\text{は実数}$$

[1]～[6]を使うと、次のような計算ができる。

$$\begin{aligned} 2\left(3\vec{a}+\vec{b}\right)+5\left(\vec{a}+4\vec{b}\right) &= 6\vec{a}+2\vec{b}+5\vec{a}+20\vec{b} \\ &= 11\vec{a}+22\vec{b} \end{aligned}$$

問５　次の計算をせよ。

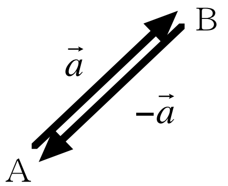
$$3\left(2\vec{a}+5\vec{b}\right)+4\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)+\vec{b}$$

ベクトル $\vec{a}$ の－１倍、$-1\vec{a}$ は、 $\vec{a}$ と同じ大きさで、向きが $\vec{a}$ と逆のベクトルである。このベクトルを $-\vec{a}$ と書き、「$\vec{a}$ の逆ベクトル」という。

ベクトルを表す有向線分があるとき、その始点と終点を入れ替えると、逆ベクトルを表す有向線分になる。つまり、

$\overrightarrow{AB}$ の逆ベクトルは $\overrightarrow{BA}$　　　式でかくと

$$\boxed{-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}}$$



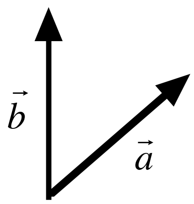
である。

ベクトル $\vec{a}$ と、その逆ベクトル $-\vec{a}$ の和は、零ベクトルになる。

$$\boxed{\vec{a} + \left(-\vec{a}\right) = \vec{0}}$$

◎ベクトルの差

ベクトル $\vec{a}$ を表す有向線分と、ベクトル $\vec{b}$ を表す有向線分の始点が一致しているとき、

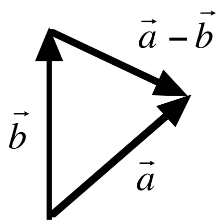


「$\vec{b}$ を表す有向線分の終点」を始点とし、

「$\vec{a}$ を表す有向線分の終点」を終点とする新たな有向線分を考える。

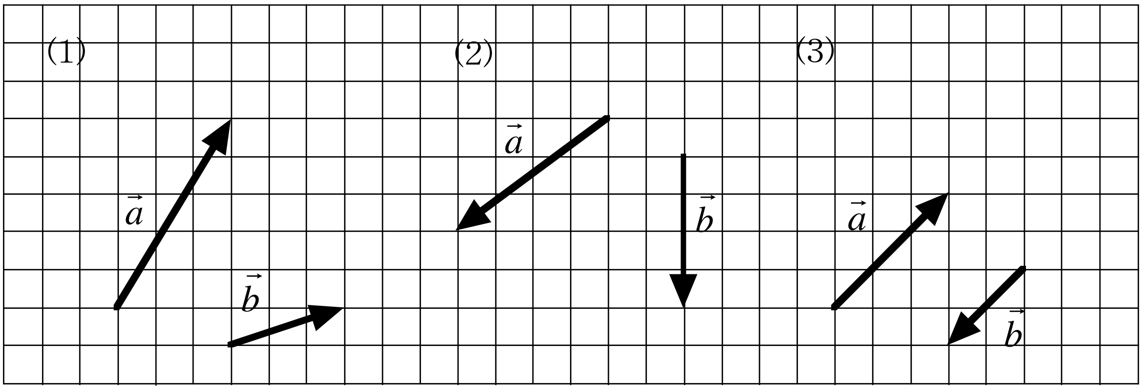
この有向線分の表すベクトルを「$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の $\boxed{\quad}$」といい、

$\boxed{\qquad\qquad}$ と書き表す。



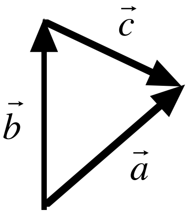
　このような位置関係にないときは、２本の有向線分を適当に平行移動して、始点どうしが一致するようにすればよい。

問６　$\vec{a}-\vec{b}$ を表す有向線分をかけ。　　　　（教科書p.46 問４）



ふつうの数の場合、
$a-b=c$ ならば $b+c=a$ である。
例えば１０－８＝２より、８＋２＝１０であることがわかる。
ベクトルの場合にも、下の図のように

$\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$　とおくと、



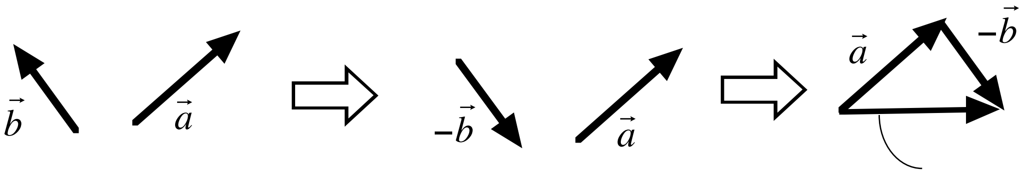
$\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$　となっていることがわかる。

また、

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$$

が成り立つ。この式から、いままでのような方法で $\vec{a}-\vec{b}$ を計算するかわりに、「$\vec{a}$」と「$\vec{b}$ の逆ベクトル」の和を計算してもよいことがわかる。

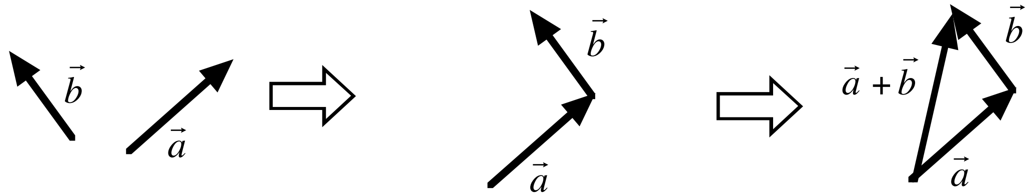
例



$\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)=\vec{a}-\vec{b}$

「ベクトルの和」と「ベクトルの差」を混同しないように

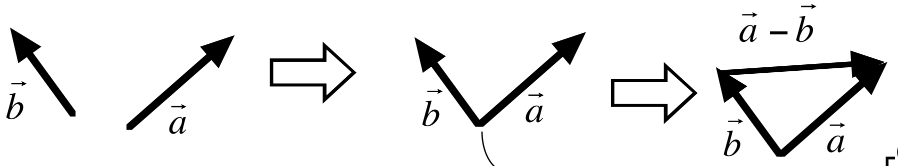
・ベクトルの和



２本の矢線を、矢の向きに沿ってつなぐ

端から端までを、途中の曲りを無視してまっすぐ強引に結ぶ

・ベクトルの差



始点どうしをくっつける

終点から終点まで矢線をひく。

(おぼえかた)
引き算の向きとベクトルの向きは逆

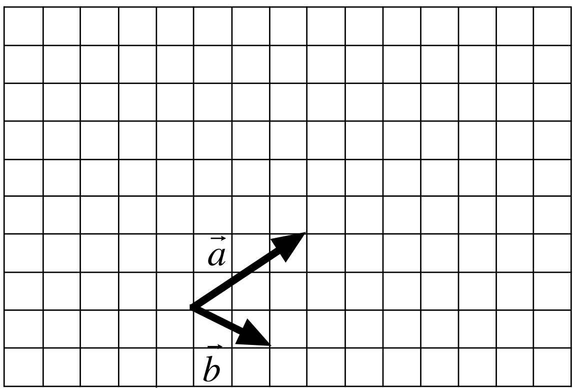
引き算の向き⇨$\vec{a}$ から$\vec{b}$

答のベクトルの向き⇨$\vec{b}$ から$\vec{a}$

※どちらの場合も、有向線分(矢線)を移動するときは、向きと大きさを変えないように「$\boxed{}$」しなければいけないことに注意

問７　次のベクトルを表す有向線分をかけ。　　（教科書p.47 問５）

(1) $3\vec{a}$　　(2) $-2\vec{b}$　　(3) $2\vec{a}+\vec{b}$　　(4) $\vec{a}-2\vec{b}$

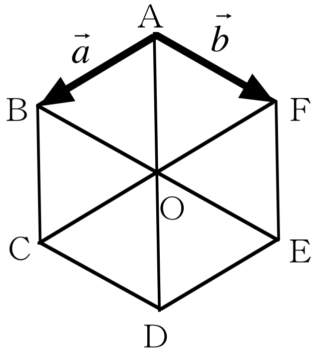


問８　中心をＯとする正六角形ＡＢＣＤＥＦにおいて、

$$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\quad \overrightarrow{AF}=\vec{b}$$

とするとき、次のベクトルを $\vec{a},\ \vec{b}$ で表せ。

（教科書p.48 例２ 問６）



(1) $\overrightarrow{FC}$　　(2) $\overrightarrow{CE}$

(3) $\overrightarrow{EB}$　　(4) $\overrightarrow{AO}$

(5) $\overrightarrow{AD}$　　(6) $\overrightarrow{BD}$

問９　次の計算をせよ。　（教科書p.49 問７）

(1) $2\left(\vec{a}-4\vec{b}\right)+\vec{a}+3\vec{b}$　　(2) $4\left(\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}\right)-5\left(\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}\right)$

問10　次の式を満たす $\vec{x}$ を $\vec{a},\ \vec{b}$ で表せ。（教科書p.49 例４ 問８）

(1) $3\vec{x}-2\vec{a}=\vec{x}-4\vec{b}$　　(2) $2\left(\vec{a}+\vec{x}\right)+3\left(\vec{b}-\vec{x}\right)=\vec{0}$

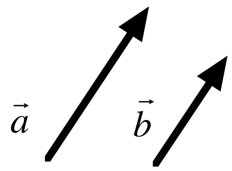
◎ベクトルの平行

$\vec{a}$, $\vec{b}$ は、どちらも零ベクトルではないとする。

$\vec{a}$と$\vec{b}$ が平行(記号では $\vec{a}\,//\vec{b}$)とは

(i) $\vec{a}$ と$\vec{b}$ が同じ向き、(ii) $\vec{a}$ と$\vec{b}$ が逆向きのいずれかの場合のことである。

(i) $\vec{a}$ と$\vec{b}$ が同じ向きのとき



例えば $\vec{a}$ の大きさが 5 で、$\vec{b}$ の大きさが 3 であったとしよう。このとき $\vec{a}$ を $\frac{3}{5}$ 倍すると、大きさも向きも $\vec{b}$ と等しいベクトルになるから、$\vec{b}$ と$\frac{3}{5}\vec{a}$ は等しいことがわかる。

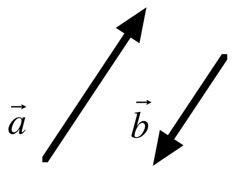
$$\vec{b}=\frac{3}{5}\vec{a}$$

ベクトル $\vec{a}$ と$\vec{b}$ の大きさがほかの値のときも同様で、一般には

$$\vec{b}=k\vec{a} \qquad \text{(ただし}k\text{は 0 より大きい実数)}$$

という形の式が成り立つ。

(ii) $\vec{a}$ と$\vec{b}$ が逆向きのとき



やはり $\vec{a}$ の大きさが 5 で、$\vec{b}$ の大きさが 3 であったとしよう。今度は $\vec{a}$ を $-\frac{3}{5}$ 倍すると、大きさも向きも $\vec{b}$ と等しいベクトルになるから、

$$\vec{b}=-\frac{3}{5}\vec{a}$$

$\vec{a}$と$\vec{b}$ の大きさがほかの値のときも同様で、一般には

$$\vec{b}=k\vec{a} \qquad \text{(ただし}k\text{は 0 より小さい実数)}$$

という形の式が成り立つ。

以上より、次のことがわかる。

> $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ とする。
>
> $\vec{a}\,//\vec{b} \iff \vec{b}=k\vec{a}$ となるような実数kがある

◎**ベクトルの大きさ**

ベクトルは、向きと大きさで決まる量である。ベクトルの大きさを表すのには、数の絶対値と同じ記号｜ ｜を用いる。

ベクトル $\vec{a}$ の大きさは $|\vec{a}|$、ベクトル $\vec{b}$ の大きさは $|\vec{b}|$ と表す。

$|\vec{a}| = |\vec{b}|$ であったとしても、「大きさが等しい」と言っているだけなので、

$\vec{a} = \vec{b}$ であるとは限らないことに注意しよう。

大きさが１のベクトルを単位ベクトルという。

$\vec{e}$ が単位ベクトルとすると $|\vec{e}| = 1$

また、零ベクトルの大きさは０であったから

$$|\vec{0}| = 0$$

次に「実数倍」と「大きさ」の関係を考えてみよう。

例えば「ベクトル $3\vec{a}$ の大きさ」は、「ベクトル $\vec{a}$ の大きさ」の３倍であるから

$$|3\vec{a}| = 3|\vec{a}|$$

また「ベクトル $-2\vec{a}$ の大きさ」は、「ベクトル $\vec{a}$ の大きさ」の２倍であるから

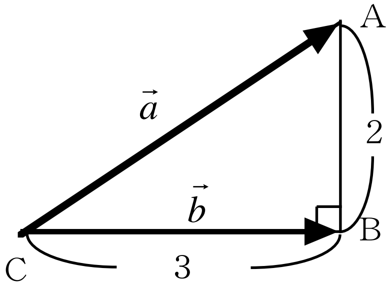
$$|-2\vec{a}| = 2|\vec{a}|$$

一般にベクトル $k\vec{a}$ の大きさは、ベクトル $\vec{a}$ の大きさの $|k|$ 倍になる。

ここの記号｜ ｜は、「ベクトルの大きさ」ではなく、「数の絶対値」を表しているので混乱しないように

$$\boxed{|k\vec{a}| = |k||\vec{a}|}$$

例　下の図のような直角三角形ＡＢＣで、$\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$ とする。



$|\vec{b}|=3$

三平方の定理より

$CA=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$　であるので

$|\vec{a}|=\sqrt{13}$

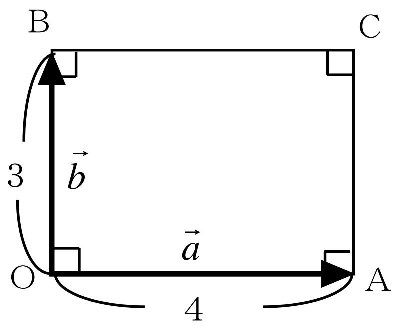
ベクトル$\vec{b}$ を $\dfrac{1}{3}$ 倍すると大きさが１になるので、

ベクトル $\vec{b}$ と同じ向きの単位ベクトルは $\dfrac{1}{3}\vec{b}$ である。

また、ベクトル $\vec{a}$ を $\dfrac{1}{\sqrt{13}}$ 倍すると大きさが１になるので、

ベクトル $\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルは $\dfrac{1}{\sqrt{13}}\vec{a}$ である。

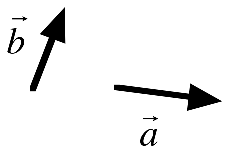
問11　ＯＡ＝４，ＯＢ＝３の長方形ＯＡＣＢがある。
$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき、次のベクトルと同じ向きの単位ベクトルを、$\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。
（教科書p.51 問９）



(1) $\overrightarrow{OA}$　　　　(2) $\overrightarrow{OC}$

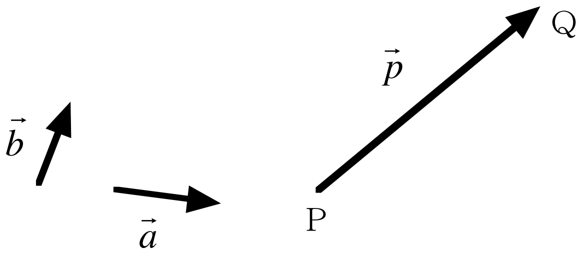
◎ベクトルの分解

　平面上に２つのベクトル $\vec{a},\ \vec{b}$ を決める。 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ はどちらも零ベクトルでなく、また、平行ではないとする。

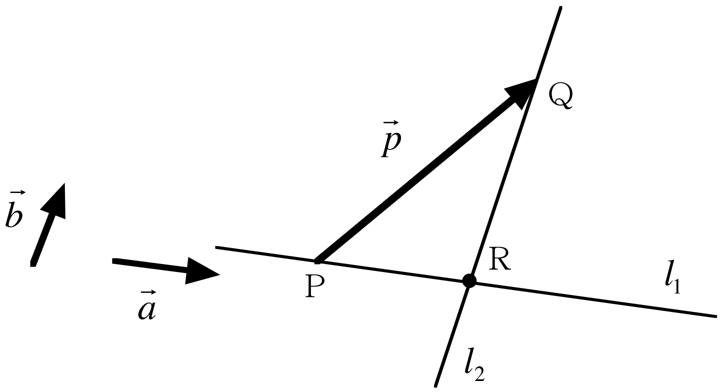


平面上のどんなベクトル $\vec{p}$ も、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を使って表すことができることを示そう。

まず、 $\vec{p}$ を表す有向線分の始点をＰ、終点をＱとする。



点Ｐを通って $\vec{a}$ に平行な直線 l_1 と、点Ｑを通って $\vec{b}$ に平行な直線 l_2 を引き、l_1 と l_2 の交点をＲとする。　（$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないので、 l_1 と l_2 は必ず交わる)。



上の図より、

$$\vec{p} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ}$$

ここで、 $\overrightarrow{PR}$ は $\vec{a}$ と平行なので $\overrightarrow{PR} = m\vec{a}$ 、 $\overrightarrow{RQ}$ は $\vec{b}$ と平行なので $\overrightarrow{RQ} = n\vec{b}$ とかけるから、

$$\vec{p} = m\vec{a} + n\vec{b}$$

平面上に、どちらも零ベクトルでなく、平行でない２つのベクトル $\vec{a},\ \vec{b}$ を決めると、平面上のどんなベクトル $\vec{p}$ も

$$\vec{p} = m\vec{a} + n\vec{b}$$

の形に表すことができる。しかもこの表し方は１通りしかない。

この式を、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の２つの方向への $\vec{p}$ の $\boxed{}$ という。

(参考)

この表し方が１通りしかないことは、次のようにしてわかる。

あるベクトル $\vec{p}$ が例えば、

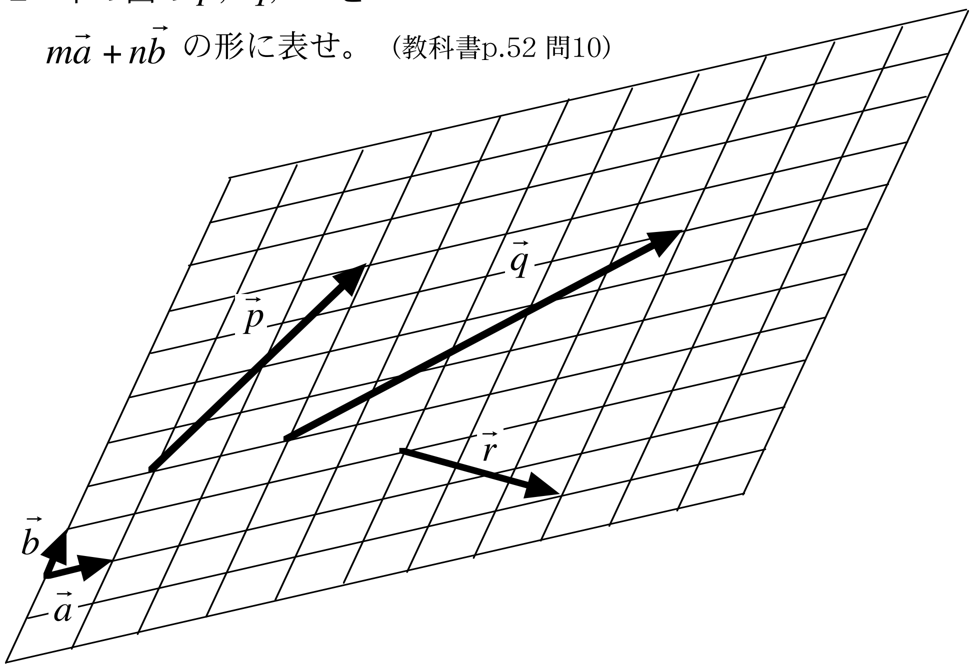
$\vec{p} = 5\vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{p} = 3\vec{a} + 7\vec{b}$ のように、２通りに表せたとすると、

$$5\vec{a} + 2\vec{b} = 3\vec{a} + 7\vec{b}$$
$$5\vec{a} - 3\vec{a} = 7\vec{b} - 2\vec{b}$$
$$2\vec{a} = 5\vec{b}$$
$$\vec{a} = \frac{5}{2}\vec{b}$$

と変形でき、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないということと矛盾する。

よって、そのようなことはあり得ない。

問12　下の図の $\vec{p},\ \vec{q},\ \vec{r}$ を $m\vec{a} + n\vec{b}$ の形に表せ。（教科書p.52 問10）



◎ベクトルの成分表示

これまで、$\vec{a}$ がどんなベクトルなのかを表現するのに、有向線分を使ってきた。それは、視覚的にわかりやすいからである。でも、欠点もある。「$\vec{a}$ がどんなベクトルか」を説明するのに、いちいち図を描かなければならないことである。何かこれを避けるうまい方法はないだろうか。

もちろん、向きと大きさが決まればよいのだから、「$\vec{a}$ は真上の方向から右回りに30°の向きで、大きさが５のベクトル」というような言い方もできる。しかし、もっと簡潔に表現できないか。

そのためにまず、基準となるベクトルを２つ決める。

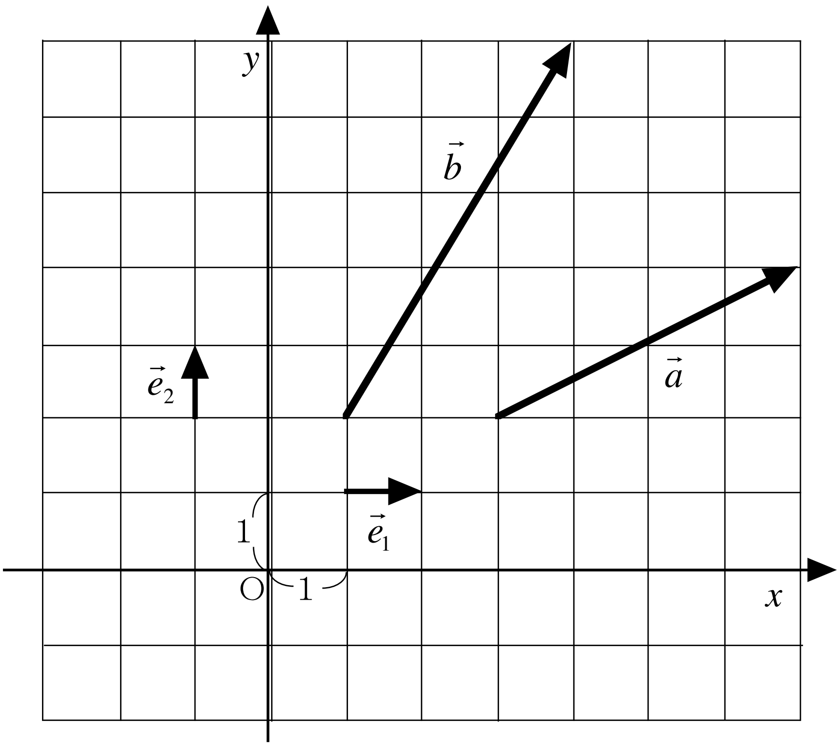
座標平面上で、

x軸の正方向の向きの単位ベクトル(大きさが $\boxed{}$ のベクトル)を$\vec{e}_1$ 、

y軸の正方向の向きの単位ベクトルを$\vec{e}_2$ という記号で表し、

これらを $\boxed{}$ ベクトルと呼ぶ。

$\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ を使うと、



上の図の $\vec{a}$ は

$$\vec{a} = 4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \quad \cdots①$$

と表せる。①式を省略して

$$\vec{a} = (4,\ 2) \cdots ②$$

という書き方をする。②は、「$\vec{a}$ が４個の $\vec{e}_1$ と２個の$\vec{e}_2$ からできている」ことを表しているとみることができ、このときの４や２を「$\vec{a}$ の成分」と呼ぶ。
特に４のほうは $\vec{a}$ のx成分、２のほうは $\vec{a}$のy成分と呼ばれる。そして、②のような表し方を「ベクトル$\vec{a}$ の成分表示」という。

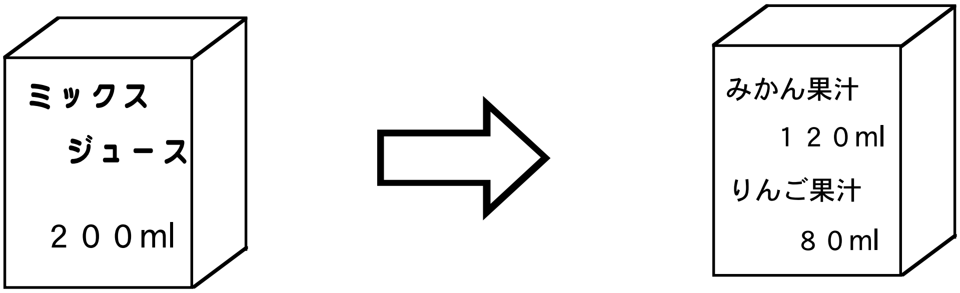
同様に、図の $\vec{b}$ は

$$\vec{b} = 3\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 \cdots ③$$

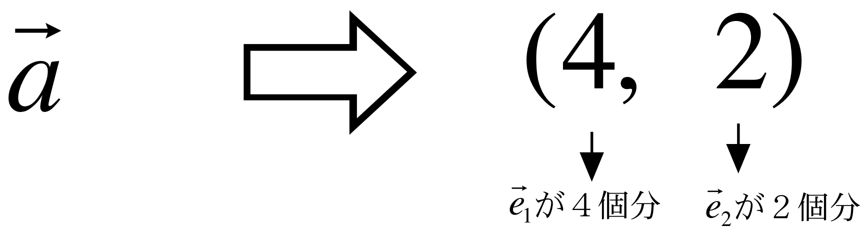
と表せる。③式を省略して

$$\vec{b} = (3,\ 5) \cdots ④$$

という書き方をする。これがベクトル $\vec{b}$ の成分表示である。この式は「$\vec{b}$ が３個の $\vec{e}_1$と５個の$\vec{e}_2$からできている」ことを表しているとみることができ、このときの３や５を「$\vec{b}$ の成分」、
特に３のほうを $\vec{b}$ のx成分、５のほうを $\vec{b}$ のy成分と呼ぶ。

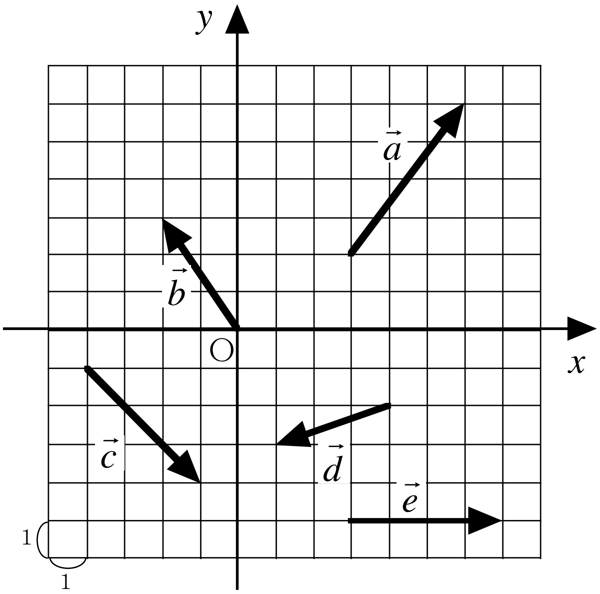


飲料の成分表示



ベクトルの成分表示

問13 $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c},\ \vec{d},\ \vec{e}$ が下の図のような有向線分で表されているとき、それぞれのベクトルの成分表示を求めよ。　（教科書p.54 例８と問11の一部）



◎和・差・実数倍と成分

例　$\vec{a}=(2,\ 5),\ \vec{b}=(4,\ 3)$とする。成分表示の記号(　,　)を用いずに書けば

$$\vec{a}=2\vec{e}_1+5\vec{e}_2,\ \ \vec{b}=4\vec{e}_1+3\vec{e}_2$$

このとき

$$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{b}&=\left(2\vec{e}_1+5\vec{e}_2\right)+\left(4\vec{e}_1+3\vec{e}_2\right)\\&=(2+4)\vec{e}_1+(5+3)\vec{e}_2\\&=6\vec{e}_1+8\vec{e}_2\end{aligned}$$

となるから、$\vec{a}+\vec{b}$ の成分表示は

$$\vec{a}+\vec{b}=(6,\ 8)$$

また

$$\begin{aligned}3\vec{a}&=3\left(2\vec{e}_1+5\vec{e}_2\right)\\&=(3\times 2)\vec{e}_1+(3\times 5)\vec{e}_2\\&=6\vec{e}_1+15\vec{e}_2\end{aligned}$$

となるから、$3\vec{a}$ の成分表示は

$$3\vec{a}=(6,\ 15)$$

以上の結果を、成分表示を用いて簡単にまとめると

$$(2,\ 5)+(4,\ 3)=(6,\ 8)\qquad\qquad 3(2,\ 5)=(6,\ 15)$$

この例からわかるように、ベクトルの和・差は、成分どうしを足したり引いたりすればよく、ベクトルの実数倍は全部の成分を実数倍すればよい。

成分表示されたベクトルの和・差・実数倍

$$(a,\ b)+(c,\ d)=(a+c,\ b+d)$$

$$(a,\ b)-(c,\ d)=(a-c,\ b-d)$$

$$k(a,\ b)=(ka,\ kb)$$

例　$\vec{a}=(5,\ -1),\ \vec{b}=(-4,\ 2)$ のとき、

$$3\vec{a}+2\vec{b}=3(5,\ -1)+2(-4,\ 2)=(15,\ -3)+(-8,\ 4)=(7,\ 1)$$

また、「◎**ベクトルの分解**」でやったように、$\vec{a}=m\vec{e}_1+n\vec{e}_2$ という表し方は1通りしかないから、

$$(a,\ b)=(c,\ d) \iff a=c \text{ かつ } b=d$$

問14 $\vec{a}=(2,\ 3),\ \vec{b}=(1,\ -4)$ のとき、次のベクトルを成分で表せ。（教科書p.55 問12）

(1) $\vec{a}+\vec{b}$　　(2) $\vec{a}-2\vec{b}$　　(3) $4\vec{b}-3\vec{a}$

問15 $\vec{a}=(5,\ 3),\ \vec{b}=(2,\ 1)$ のとき、次の等式を満たす $\vec{x}$ を成分で表せ。

(1) $\vec{a}+\vec{x}=2\vec{b}$　　(2) $2\vec{a}+\vec{x}=3\vec{b}-\vec{x}$　　（教科書p.55 練習１）

例　２つのベクトル $\vec{a}=(3,\ -2)$, $\vec{b}=(x,\ 4)$ が平行であるとすると、

「**◎ベクトルの平行**」でやったように、

$\vec{b}=k\vec{a}$ となるような実数kがある。

$$(x,\ 4)=k(3,\ -2)$$
$$(x,\ 4)=(3k,\ -2k)$$
$$\begin{cases} x=3k & \cdots① \\ 4=-2k & \cdots② \end{cases}$$

②より　$k=-2$　　　　これを①へ代入して　$x=-6$

問16 $\vec{a}=(-3,\ 4)$, $\vec{b}=(5,\ y)$ が平行になるように、yの値を定めよ。

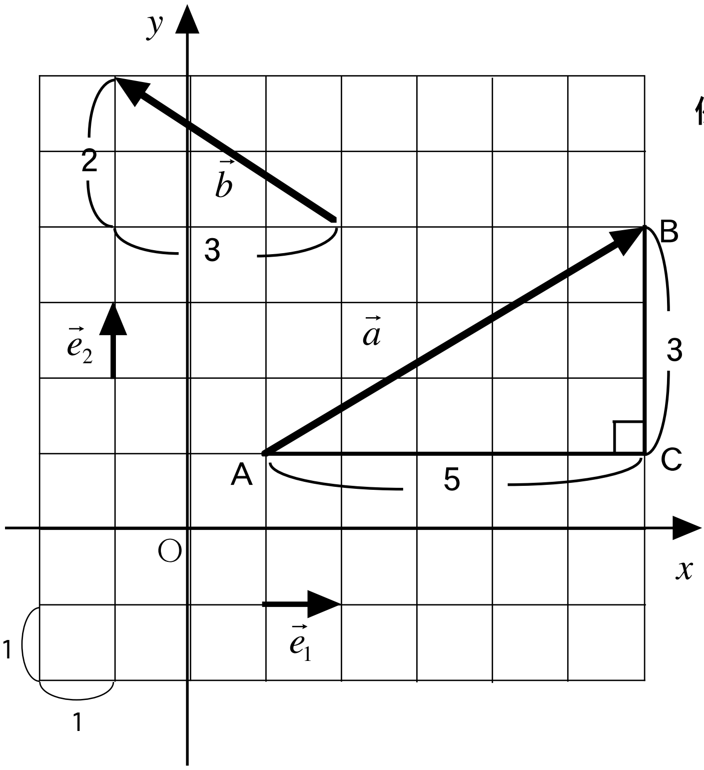
（教科書p.55 問13）

問17 $\vec{a}=(2,\ 1)$, $\vec{b}=(-1,\ 3)$ とする。　（教科書p.56 例題１ 問14）

(1) $\vec{c}=(3,\ 5)$ を$m\vec{a}+n\vec{b}$ の形に表せ。

(2) $\vec{d}=(-5,\ 8)$ を$m\vec{a}+n\vec{b}$ の形に表せ。

◎ベクトルの大きさと成分



例　ベクトル $\vec{a}=(5,\ 3)$ の大きさを求めてみよう。

$\vec{a}$ を表す有向線分を図示すると、左のようになる。

ＡＣ＝５，ＢＣ＝３だから三平方の定理より

$$|\vec{a}| = AB = \sqrt{5^2+3^2} = \sqrt{34}$$

$$\boxed{\vec{a}=(a_1,\ a_2)\ \text{のとき}\qquad |\vec{a}|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}}$$

※上の図の $\vec{b}$ の成分表示は $\vec{b}=(-3,\ 2)$ である。このように成分に負の値をもつ場合にも、気にせずにこのままこの公式を使ってよい。

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-3)^2+2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

問18　次のベクトルの大きさを求めよ。　（教科書p.54 例８と問11の一部）

$\vec{a}=(3,\ 4)$　　$\vec{b}=(-2,\ 3)$　　$\vec{c}=(3,\ 3)$

$\vec{d}=(-3,\ -1)$　　$\vec{e}=(4,\ 0)$

問19 $\vec{a} = (4,\ -1)$ とする。

(1) $\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルを求めよ。

(2) $\vec{a}$ と平行な単位ベクトルを求めよ。

第２節　ベクトルの内積

◎内積について学ぶまえに

いままで習ったように、ベクトルは、ふつうの数と同じように、足し算や引き算をすることができる。

・ベクトル $\vec{a}$ とベクトル $\vec{b}$ を足すことができ、答 $\vec{a}+\vec{b}$ も、もちろんベクトル

・ベクトル $\vec{a}$ からベクトル $\vec{b}$ を引くことができ、答 $\vec{a}-\vec{b}$ も、もちろんベクトル

では、２つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の掛け算というものは、考えることができるのだろうか。

実は、ベクトルどうしの積というのは何種類か知られているのだが、そのどれもが、ふつうの数の掛け算とは少しずつ性質が違うのである。高校で習うのは、これらのうち「内積」と呼ばれるものであるが、これもふつうの数の掛け算と全く同じというわけにはいかない。

２つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は、$\vec{a}\cdot\vec{b}$ という記号で表されるが、注意しなければいけないのは、ベクトル $\vec{a}$ とベクトル $\vec{b}$ の内積を計算すると、その答 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ はベクトルではなく、ふつうの数(実数)になってしまうということである。

これから、次のようなことが起こってしまう。

(1) ふつうの数の場合は、$a\times b\times c\times d\times\cdots$　のように、何回も続けて掛け算を行うことができるが、ベクトルの内積の場合には、$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を計算して、さらにその答と別のベクトル $\vec{c}$ との内積を計算する、というようなことができない。

(2) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ とベクトル $\vec{c}$ との和

$$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}$$

のような計算もできない。

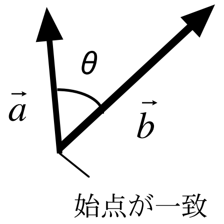
それでも、交換法則や分配法則は成立するので、慣れてくるとそんなに普通の数との違いをあまり気にせずに計算できる。

※数の掛け算の場合には、$a\times b$ でも $a\cdot b$ でも ab でも同じだが、ベクトルの積は内積以外にも何種類かあり、内積の場合は必ず「・」を用いて $\vec{a}\cdot\vec{b}$ と書く約束になっている。他の記号を使うと、高校では習わない全く違った計算のことになってしまうこともあるので、注意すること。

◎ベクトルの内積

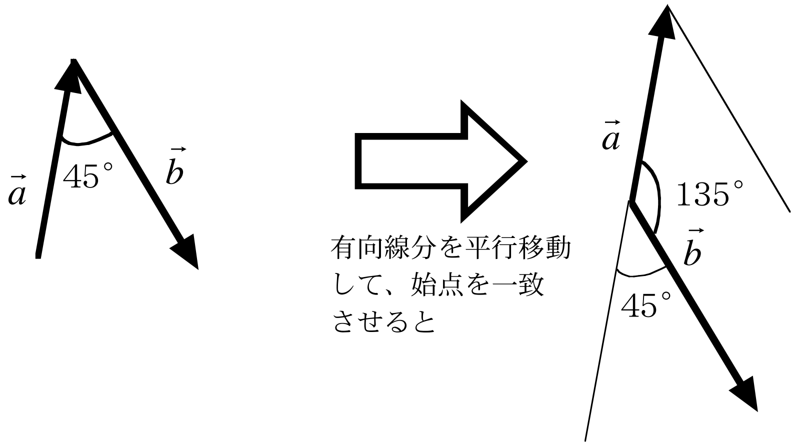
(準備) ベクトルのなす角

$\vec{a}$ を表す有向線分と $\vec{b}$ を表す有向線分の始点が一致しているとき、２本の有向線分のつくる角 θ を「 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角」という。



始点が一致していない場合には、２本の有向線分のいずれかあるいは両方を平行移動すればよい。

例



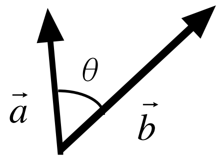
$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は135°

・内積の定義

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が θ のとき、

$|\vec{a}| \times |\vec{b}| \times \cos\theta$ のことを

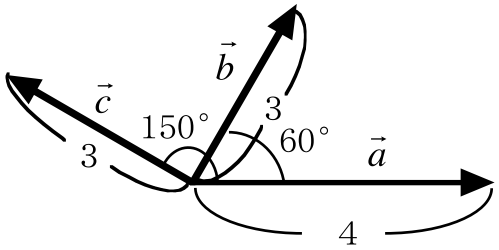
「 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積」といい、$\vec{a} \cdot \vec{b}$ という記号で表す。



$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \qquad \theta \text{ は } \vec{a} \text{ と } \vec{b} \text{ のなす角}}$$

※ $\vec{a}$, $\vec{b}$ の一方または両方が零ベクトルのときは $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は考えられないが、このようなときは、$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ とする。

例　（教科書p.58 例11）



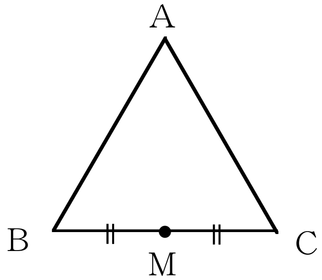
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=4\times 3\times\frac{1}{2}=6$$

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}||\vec{c}|\cos 150^\circ=4\times 3\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-6\sqrt{3}$$

問20　$\vec{a}$ と$\vec{b}$ のなす角をθとする。次の場合、内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。
（教科書p.58 問17）

(1) $|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=3,\ \theta=30^\circ$　　(2) $|\vec{a}|=\sqrt{2},\ |\vec{b}|=5,\ \theta=135^\circ$

問21　１辺の長さが２の正三角形ＡＢＣの、
辺ＢＣの中点をＭとするとき、
次の内積を求めよ。　（教科書p.59 例12 問18）



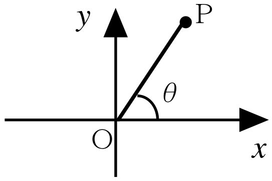
(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

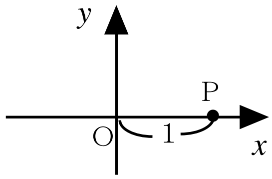
(4) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}$

(１年の復習) おもな角のコサインの値



$$\cos\theta = \frac{(\text{P の } x \text{ 座標})}{(\text{OP の長さ})}$$

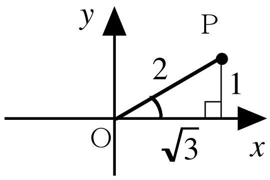
0°



OPの長さ

Pのx座標

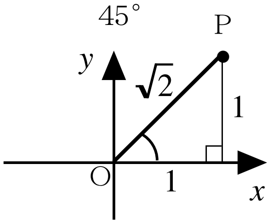
30°



OPの長さ

Pのx座標

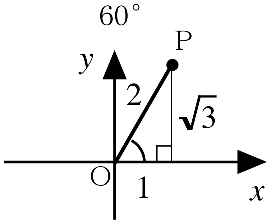
45°



OPの長さ

Pのx座標

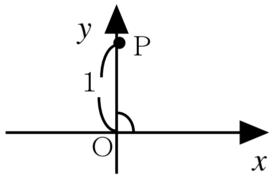
60°



OPの長さ

Pのx座標

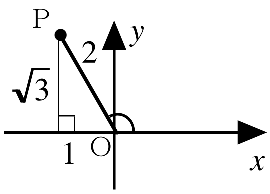
90°



OPの長さ

Pのx座標

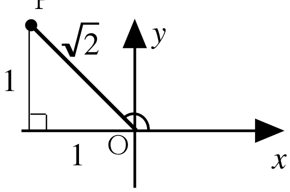
120°



OPの長さ

Pのx座標

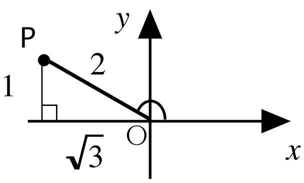
135°



OPの長さ

Pのx座標

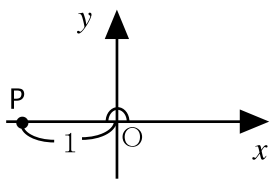
150°



OPの長さ

Pのx座標

180°



OPの長さ

Pのx座標

これらの図より

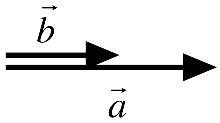
θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\cos\theta$									

◎内積の意味

内積の意味は、おおざっぱに言うと、「ベクトルの向きの違いによる効率の低下まで考えに入れた掛け算」のことである。

以下の(1)から(6)で、$\vec{a}$ と$\vec{b}$ のなす角をθとする。

(1) $\theta = 0°$ のとき



$\cos\theta = 1$ なので

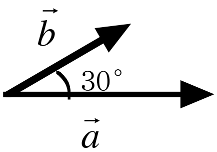
$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = |\vec{a}||\vec{b}|$

２つのベクトルの向きが同じなので、効率は最大(効率100％)

($\vec{a}$ の大きさ)×($\vec{b}$ の大きさ)

そのものが内積になる

(2) $\theta = 30°$ のとき



$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0.866\cdots$

なので

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

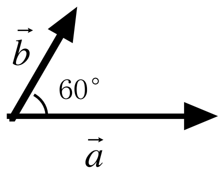
$= |\vec{a}||\vec{b}| \times 0.866\cdots$

２つのベクトルの向きが少し違っているので、効率はやや悪くなり、

($\vec{a}$ の大きさ)×($\vec{b}$ の大きさ)

の約87％が内積になる

(3) $\theta = 60°$ のとき



$\cos\theta = \dfrac{1}{2} = 0.5$

なので

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

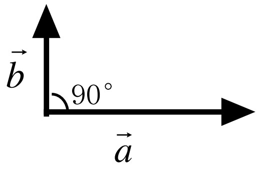
$= |\vec{a}||\vec{b}| \times 0.5$

２つのベクトルの向きの違いが大きくなったので、効率は更に悪くなって、

($\vec{a}$ の大きさ)×($\vec{b}$ の大きさ)

の50％が内積になる

(4) $\theta = 90^\circ$ のとき



$\cos\theta = 0$ なので

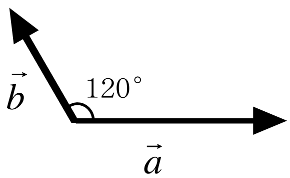
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = 0$$

２つのベクトルが全く無関係な向きなので、効率は０％

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の大きさに関係なく、

内積の値は０になる

(5) $\theta = 120^\circ$ のとき



$\cos\theta = -\dfrac{1}{2} = -0.5$

なので

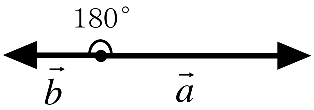
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$= |\vec{a}||\vec{b}| \times (-0.5)$$

２つのベクトルが逆向きに近くなり、効率はマイナスに

(効率は「マイナス50％」)

(6) $\theta = 180^\circ$ のとき



$\cos\theta = -1$

なので

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$= -|\vec{a}||\vec{b}|$$

２つのベクトルの向きが全く逆なので、効率は最も悪く、

($\vec{a}$ の大きさ)×($\vec{b}$ の大きさ)

の符号を反対にしたものが内積になる

(効率は「マイナス100％」)

◎内積の計算規則

ベクトルの内積について、以下の計算法則が成り立つ。

[１] $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ 　交換法則

[２] kが実数の時

$$(k\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(k\vec{b}) = k(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

[３] $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$ 　分配法則

[４] $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$ 　分配法則

［１］［２］が成立することは、内積の定義からすぐわかる。

分配法則［３］が成り立つ理由をまとめると、以下の通り。

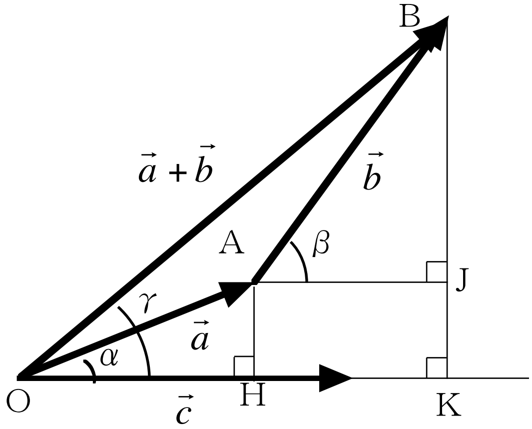


図　１

$$\vec{a}\cdot\vec{c} = |\vec{a}||\vec{c}|\cos\alpha = |\vec{a}||\vec{c}|\times\frac{OH}{|\vec{a}|} = |\vec{c}|OH \quad \cdots①$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}|\cos\beta = |\vec{b}||\vec{c}|\times\frac{AJ}{|\vec{b}|} = |\vec{c}|AJ \quad \cdots②$$

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = |\vec{a}+\vec{b}||\vec{c}|\cos\gamma = |\vec{a}+\vec{b}||\vec{c}|\times\frac{OK}{|\vec{a}+\vec{b}|} = |\vec{c}|OK \quad \cdots③$$

ところで**図１**より、ＯＫ＝ＯＨ＋ＡＪである。両辺に$|\vec{c}|$を掛けると

$$|\vec{c}|OK = |\vec{c}|OH + |\vec{c}|AJ \quad \cdots④$$

④に③①②を代入すると

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$$

分配法則［３］と交換法則［１］より、分配法則［４］が成り立つこともわかる。

［１］〜［４］から、次のような計算をしてよいことがわかる。

$$\left(3\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot 2\vec{c} = 6\vec{a}\cdot\vec{c} + 2\vec{b}\cdot\vec{c}$$

$$\begin{aligned}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}-\vec{d}\right) &= \vec{a}\cdot\left(\vec{c}-\vec{d}\right) + \vec{b}\cdot\left(\vec{c}-\vec{d}\right)\\ &= \vec{a}\cdot\vec{c} - \vec{a}\cdot\vec{d} + \vec{b}\cdot\vec{c} - \vec{b}\cdot\vec{d}\end{aligned}$$

◎成分表示と内積

例えば $\vec{a}=(5,\ 2)$, $\vec{b}=(4,\ 3)$ のとき
$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積はどのように計算すればよいだろうか。

内積の定義式は

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

（θ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角）

である。右辺の中の $|\vec{a}|$ と $|\vec{b}|$ はベクトルの大きさの公式から簡単に求められるが、
角 θ は、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ を表す有向線分を作図して、分度器で測ったとしても、近似値しかわからない。

そこで全く違う考え方で、$\vec{a}=(5,\ 2)$ と $\vec{b}=(4,\ 3)$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めてみよう。

成分表示の記号(　,　)を使わずにかくと、

$\vec{a}=5\vec{e}_1+2\vec{e}_2$, $\vec{b}=4\vec{e}_1+3\vec{e}_2$ 　であるので

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=\left(5\vec{e}_1+2\vec{e}_2\right)\cdot\left(4\vec{e}_1+3\vec{e}_2\right)\\&=5\vec{e}_1\cdot\left(4\vec{e}_1+3\vec{e}_2\right)+2\vec{e}_2\cdot\left(4\vec{e}_1+3\vec{e}_2\right)\\&=5\times4\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1+5\times3\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2+2\times4\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1+2\times3\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2\end{aligned}$$

ここで

$$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1=|\vec{e}_1||\vec{e}_1|\cos0^\circ=1\times1\times1=1$$

$$\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2=|\vec{e}_2||\vec{e}_2|\cos0^\circ=1\times1\times1=1$$

$$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1=|\vec{e}_1||\vec{e}_2|\cos90^\circ=1\times1\times0=0$$

であるから

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=5\times4+2\times3=26$$

いまの $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の場合に限らず、一般の $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ と $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ について

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=\left(a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2\right)\cdot\left(b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2\right)\\&=a_1b_1\left(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1\right)+a_1b_2\left(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2\right)+a_2b_1\left(\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1\right)+a_2b_2\left(\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2\right)\\&=a_1b_1+a_2b_2\end{aligned}$$

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2),\ \vec{b}=(b_1,\ b_2)\text{ のとき}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

例　$\vec{a}=(2,\ 3),\ \vec{b}=(-5,\ 4)$ のとき　　（教科書p.62 例15）

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times(-5)+3\times4=2$$

問22　次の２つのベクトル $\vec{a},\ \vec{b}$ の内積を求めよ。　（教科書p.62 問19）

(1)　$\vec{a}=(1,\ 2),\ \vec{b}=(4,\ 3)$

(2)　$\vec{a}=(3,\ 2),\ \vec{b}=(2,\ -3)$

(3)　$\vec{a}=(-2,\ \sqrt{2}),\ \vec{b}=(0,\ 3)$

(4)　$\vec{a}=(p,\ q),\ \vec{b}=(-q,\ 3p)$

◎２つのベクトルのなす角を求める

例　成分で表された２つのベクトル $\vec{a}=(4,\ \sqrt{3})$ と $\vec{b}=(1,\ 5\sqrt{3})$ のなす角 θ を求めてみよう。内積の定義より

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\quad\cdots①$$

ここで

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=4\times1+\sqrt{3}\times5\sqrt{3}=19$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{4^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{19}$$

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{1^2 + \left(5\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$$

である。これらを①へ代入すれば

$$19 = \sqrt{19} \times 2\sqrt{19}\cos\theta$$

$$19 \times 2\cos\theta = 19$$

$$2\cos\theta = 1$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = 60^\circ$$

と、なす角を求めることができる。いまの場合は内積の定義式①を使ったが、教科書のように①を変形して新しい公式

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}}$$

を作っておき、これに代入して $\cos\theta$ を求めても、もちろんよい。

問23　次の２つのベクトル$\vec{a}$ と$\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。　（教科書p.62 問20）

（1）$\vec{a} = (1,\ 2),\ \vec{b} = (-1,\ 3)$　　（2）$\vec{a} = (1,\ -3\sqrt{3}),\ \vec{b} = (-\sqrt{3},\ 2)$

◎ベクトルの垂直

内積の定義　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ より、零ベクトルでない２つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積が０になるのは $\cos\theta=0$ の場合に限られ、このとき、$\theta=90°$ となる。

２つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が90°のとき、「$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は垂直である」といい、$\vec{a}\perp\vec{b}$ という記号で表す。

$\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0}$ のとき
$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

例　$\vec{a}=(2,\ -3),\ \vec{b}=(x-1,\ 2x)$ のとき、$\vec{a}\perp\vec{b}$ となるxの値を求めよう。

（教科書p.63 例18）

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$$2\times(x-1)+(-3)\times 2x=0$$

$$-4x-2=0$$

$$x=-\frac{1}{2}$$

問24　２つのベクトル$\vec{a}=(2x,\ -1),\ \vec{b}=(x-3,\ x)$ が垂直になるようなxの値を求めよ。

（教科書p.63 問21）

問25　$\vec{a}=(2,\ -1)$ に垂直な単位ベクトル$\vec{b}$を求めよ。　（教科書p.63 例19）

$\vec{b}=(x,\ y)$ とおく。

$\vec{a} \perp \vec{b}$ より　$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$\boxed{} = 0$　　変形すると　$y = \boxed{}$ …①

一方、$\vec{b}$ が単位ベクトルであることより、

$|\vec{b}| = 1$

$\sqrt{} = 1$　　両辺を 2 乗すると $\boxed{} = 1$ …②

①を②へ代入

問26 $\vec{a} = (1,\ 3)$ に垂直で、大きさが $\sqrt{10}$ のベクトル $\vec{b}$ を求めよ。

（教科書p.63 問22）

◎内積を含む式の計算

自分自身とのなす角は０°であるから、

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|\cos 0^\circ = |\vec{a}||\vec{a}|\times 1 = |\vec{a}|^2$$

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2}$$

この式から、

数 a の場合の a^2 に対応するものは、

ベクトル $\vec{a}$ では $|\vec{a}|^2$ であることがわかる。

なお、「**◎内積について学ぶまえに**」でやったように、数 a の場合の a^3, a^4, a^5, $\cdots$ に対応するものは存在しない。

内積を含む式の計算は、「**◎内積について学ぶまえに**」の(1) (2)のような点に注意すれば、「**◎内積の計算規則**」[１]～[４]のような、数の場合と同じ形の規則が成立しているので、ふつうの数式とほぼ同じように計算できる。例えば、中学や高１で習った、２次の数式の展開公式

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

も、掛け算を内積「・」に、２乗を $|\quad|^2$ に直せば、ベクトルで成り立つ公式になる(もちろんaやbは $\vec{a}$ や $\vec{b}$ に書き直さなければならない)。

$$\boxed{\begin{aligned} |\vec{a}+\vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ |\vec{a}-\vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right) &= |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 \end{aligned}}$$

例　３番目の式が成り立つことをたしかめてみよう。　（教科書p.64 例題３）

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right) = \vec{a}\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right) + \vec{b}\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$$

$$= \vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{a} - \vec{b}\cdot\vec{b}$$
$$= \vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{b}$$
$$= \vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{b}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$$

問27　１番目の式 $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2$ が成り立つことを証明せよ。

（教科書p.64 問24）

例　$|\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 3,\ \vec{a}\cdot\vec{b} = -2$ のとき、$|2\vec{a}-\vec{b}|$ の値を求めてみよう。

（教科書p.65 例題４）

$$|2\vec{a}-\vec{b}|^2 = 4|\vec{a}|^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2$$

求めたいのは $|2\vec{a}-\vec{b}|$ だが、まず、$|2\vec{a}-\vec{b}|^2$ を計算するのがコツ

ふつうの数の場合の展開
$(2a-b)^2 = 4a^2 - 4ab + b^2$
と比べてみよう

$$= 4\times 2^2 - 4\times(-2) + 3^2 = 33$$

$$|2\vec{a}-\vec{b}|^2 = 33$$
$$|2\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{33}$$

問28　$|\vec{a}| = 4,\ |\vec{b}| = 3,\ \vec{a}\cdot\vec{b} = 5$ のとき、$|\vec{a}+\vec{b}|$ の値を求めよ。

（教科書p.64 問25）

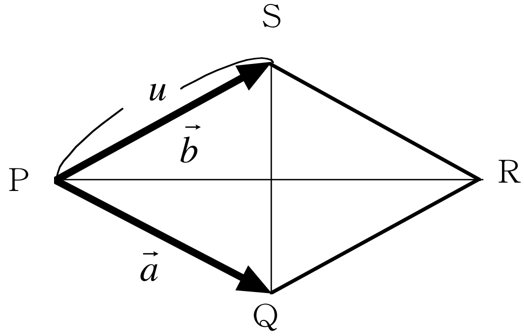
問29　$\left|\vec{a}\right| = 2,\ \left|\vec{b}\right| = 5$ で、$\vec{a}$ と$\vec{b}$ のなす角が60°のとき、$\left|\vec{a} + 2\vec{b}\right|$ の値を求めよ。

（教科書p.64 問題2-2）

◎図形の証明問題への応用

例題　ひし形の対角線は直交することを証明せよ。

１辺の長さがuのひし形ＰＱＲＳを考え、$\overrightarrow{PQ} = \vec{a},\ \overrightarrow{PS} = \vec{b}$ とする。



すると

$$\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = u$$

また、

$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PS} = \vec{b} \text{ より}$$

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \vec{a} + \vec{b}$$

さらに

$$\overrightarrow{SQ} = \vec{a} - \vec{b}$$

であるので

$$\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{SQ} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} - \vec{b}\right)$$

$$= \left|\vec{a}\right|^2 - \left|\vec{b}\right|^2 = u^2 - u^2 = 0$$

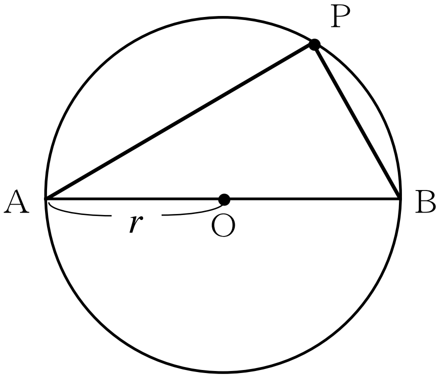
$$\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{SQ} = 0 \text{ より} \qquad \overrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{SQ}$$

よって２本の対角線ＰＲとＳＱは直交する。

例題　半円のつくる円周角は90°であることを証明せよ。

中心O、半径rの円に、直径ＡＢを引き、円上にＡ，Ｂとは異なる点Ｐをとる。

すると、$\overrightarrow{OB}$ は$\overrightarrow{OA}$ の逆ベクトルになっている。



$$\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA}$$

これより

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP} = \left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}\right)$$

$$= \left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}\right)$$

$$= \left|\overrightarrow{OP}\right|^2 - \left|\overrightarrow{OB}\right|^2 = r^2 - r^2 = 0$$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP} = 0$ より $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP}$ であるから

円周角∠APB＝90°