

## 数学B「平面のベクトル」の自主教材

川口東高等学校 元吉 隆夫

ベクトルのような新たな概念を学ぶとき、教える側から見るとどうしてそんなことで悩むのだろうかと思うような所が障害となって先へ進めないことが埒ある。教科書をみてもなかなか解決しないこうした悩みに対応するよう、内積の意味やベクトルの演算の特徴についても解説した、書き込み式の冊子を作ってみた。

川口東高校では、2年生で数学Bが全員必修になっている。他の高校で、「全員に数学Bを教えるのが大変だ」というのも一つの理由で、2年から文理のコース分けをするようになったという経験をしたことがあり、数学に対して苦手意識を持つ生徒が多い本校で数学Bを教えるには、いろいろな工夫が必要と感じた。そこで「平面上のベクトル」については、書き込み式の冊子を使って授業を行うことにした。論理的な厳密さよりわかりやすさを重視して、おおまかな流れは、以下のようした。

### 第1節 ベクトル

- ・ベクトルとはどんな量か
- ・ベクトルの相等
- ・有向線分
- ・零ベクトル
- ・ベクトルの和
- ・ベクトルの実数倍
- ・逆ベクトル
- ・ベクトルの差
- ・ベクトルの平行
- ・ベクトルの大きさ
- ・ベクトルの分解
- ・成分表示
- ・和・差・実数倍と成分
- ・ベクトルの大きさと成分

### 第2節 ベクトルの内積

- ・内積について学ぶまえに
- ・ベクトルのなす角
- ・内積の定義
- ・(1年の復習)おもな角のコサインの値
- ・内積の意味
- ・内積の計算規則(特に分配法則)
- ・成分表示と内積
- ・ベクトルのなす角を求める
- ・ベクトルの垂直
- ・内積を含む式の計算
- ・図形の証明問題への応用

ベクトルは数ではないが、数と同じように演算できる「もの」である。高校から先の数学ではこのような「数と同じように演算できるもの」について学ぶことが多くなるわけで、こういう対象を学ぶことは、大きな意義がある。「数と同じように演算できるもの」としては、行列のほうが計算の自由度が大きく、この観点から見ると重要性が高いが、現行課程ではほとんど理系の3年生しか学ばず、更に新課程では、高校数学から行列はなくなってしまうようである。

ベクトルというのは、生徒にとっていままで学んだことのない、全く新しい概念である。こういう内容を学ぶとき、生徒は、教える側の全く予想しなかったような所で悩み、先に進めなくなってしまうことが往々にして見受けられ、その「障害となる部分」も、生徒によってそれぞれ異なっていることも多い。教科書はどれも簡潔にまとめてあるため、こういう疑問を解消しづらいようである。

そこで、この冊子では、説明はできるだけ詳しくし、「内積の意味」や「内積という計算の特徴」のようなことも触れておいた。一方で、教科書を読んでわかるのならば、別にこの冊子を細部まで一生懸命読まなくてもいいよとアドバイスした。また、この冊子は書き込み式にし、文章中に何箇所か「虫食いの穴」を空けてある。特にベクトルの作図のときにマス目をノートに作らなくて良いのが、便利だったようである。

以下に、この自主教材の中で特徴のある記述を載せておく。これだけ見ると個性的な変わった教材と思うかもしれないが、これらはできるだけ詳しくした記述の一部分で、ほかに普通の教科書と同じようなページも沢山あることを了解して欲しい。

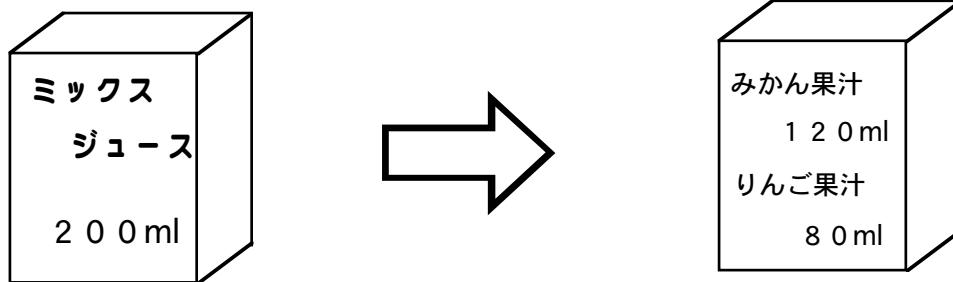
○3ページより

「有向線分」と「ベクトル」は同じものではない

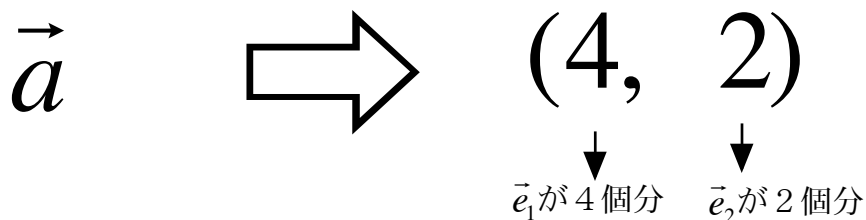
- ・小学校低学年で、おはじきやタイルを使って、1, 2, 3, …といった数の説明をするが、「数」と「おはじきやタイル」は同じものではない。
- ・もっと学年が進むと、数直線を使って、数の説明をするが、「数」と「数直線上の点」は同じものではない。

上の例と同様に、有向線分を使うと向きと大きさが同時に決まって便利だから、有向線分でベクトルを表すのであり、これらは同じものではない。そこで、厳密には「この有向線分の表すベクトル」という言い方をする必要がある。

○17ページより



飲料の成分表示



ベクトルの成分表示

○23ページより

いままで習ったように、ベクトルは、ふつうの数と同じように、足し算や引き算をすることができる。

- ・ベクトル  $\vec{a}$  とベクトル  $\vec{b}$  を足すことができ、答  $\vec{a} + \vec{b}$  も、もちろんベクトル
  - ・ベクトル  $\vec{a}$  からベクトル  $\vec{b}$  を引くことができ、答  $\vec{a} - \vec{b}$  も、もちろんベクトル
- では、2つのベクトル  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の掛け算というものは、考えることができるのだろうか。

実は、ベクトルどうしの積というのは何種類か知られているのだが、そのどれもが、ふつうの数の掛け算とは少しずつ性質が違うのである。高校で習うのは、これらのうち「内積」と呼ばれるものであるが、これもふつうの数の掛け算と全く同じというわけにはいかない。

2つのベクトル  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の内積は、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$  という記号で表されるが、注意しなければいけないのは、ベクトル  $\vec{a}$  とベクトル  $\vec{b}$  の内積を計算すると、その答  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  はベクトルではなく、ふつうの数(実数)になってしまうということである。

これから、次のようなことが起こってしまう。

(1) ふつうの数の場合は、 $a \times b \times c \times d \times \dots$  のように、何回も続けて掛け算を行うことができるが、ベクトルの内積の場合には、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$  を計算して、さらにその答と別のベクトル  $\vec{c}$  との内積を計算する、というようなことができない。

(2) 内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  とベクトル  $\vec{c}$  との和  
 $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{c}$

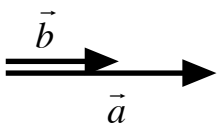
のような計算もできない。

○27~28ページより(途中省略)

内積の意味は、おおざっぱに言うと、「ベクトルの向きの違いによる効率の低下まで考えに入れた掛け算」のことである。

以下の(1)から(6)で、 $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  のなす角を  $\theta$  とする。

(1)  $\theta = 0^\circ$  のとき



$\cos\theta = 1$  なので

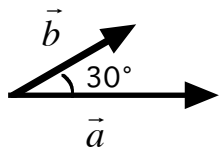
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos\theta = |\vec{a}| |\vec{b}|$$

2つのベクトルの向きが同じなので、効率は最大(効率100%)

( $\vec{a}$  の大きさ)  $\times$  ( $\vec{b}$  の大きさ)

そのものが内積になる

(2)  $\theta = 30^\circ$  のとき



$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866\dots$$

なので

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos\theta \\ &= |\vec{a}| |\vec{b}| \times 0.866\dots\end{aligned}$$

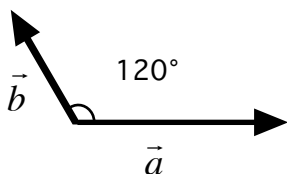
⋮

2つのベクトルの向きが少し違って  
いるので、効率はやや悪くなり、

( $\vec{a}$  の大きさ) × ( $\vec{b}$  の大きさ)  
の約87%が内積になる

⋮

(5)  $\theta = 120^\circ$  のとき



$$\cos\theta = -\frac{1}{2} = -0.5$$

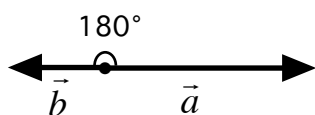
なので

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos\theta \\ &= |\vec{a}| |\vec{b}| \times (-0.5)\end{aligned}$$

2つのベクトルが逆向きに近くなり、  
効率はマイナスに

(効率は「マイナス50%」)

(6)  $\theta = 180^\circ$  のとき



$$\cos\theta = -1$$

なので

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos\theta \\ &= -|\vec{a}| |\vec{b}|\end{aligned}$$

2つのベクトルの向きが全く逆なの  
で、効率は最も悪く、

( $\vec{a}$  の大きさ) × ( $\vec{b}$  の大きさ)

の符号を反対にしたものが  
内積になる

(効率は「マイナス100%」)

私のホームページ <http://www.suugakusozai.com/> (数学素材.com)に、私が思いついた授業での工夫や以前の発表資料が載せてあり、今回紹介した自作の教材も今後、PDF形式でアップする予定である。