数学Ａ　論証の指導について

豊岡高等学校　　元吉　隆夫

　数学Ａで集合や論証の授業をするときには、いつも「全ての学問のいちばんの基礎の土台のところに論理学があり、そのすぐ上に集合論が乗っていて、更にその上にふつうの数学が乗っているんだ」という話をするが、実際にはどちらにも高校ではあまり多くの時間を割いていない。

　論理については、数学Ａの教科書で「論理と集合」とか「論証」といった題名で一応一つの章になっているが、せいぜい10ページ程度である。その内容についても、論理を研究するには、「私たちがふだん当たり前のことと思って行っている推論をきちんと形式化する」ことがまずなにより重要な点であるにも関わらず、そこからもう不完全と思われる記述が目立つ。

最低限、次のことは確認する必要があるだろう。

・Ｐ，Ｑが命題のとき
　　「Ｐでない」「ＰかつＱ」「ＰまたはＱ」も命題。
　ｐ，ｑが条件のとき
　　「ｐでない」「ｐかつｑ」「ｐまたはｑ」も条件。
・ｐ，ｑが条件のときｐ⇒ｑは命題になる。
・「Ｐでない」はＰが真のとき偽で、Ｐが偽のとき真。
　「ＰかつＱ」はＰとＱがともに真のとき真でそれ以外では偽。
　「ＰまたはＱ」はＰ，Ｑの少なくとも一方が真のとき真で、両方偽のとき偽。
　「ｐでない」「ｐかつｑ」「ｐまたはｑ」も同様。
・変数をある値に定めたら条件ｐが真になるならば、その値を条件ｑに代入
　しても必ず真になるとき、ｐ⇒ｑは真で、そうでないときは偽。

　ｐ⇒ｑを使って「条件から命題ができる」様子をわからせるのはなかなか難しい。最近の生徒の中には電子メールの顔文字字で、量記号∀や∃を見ている者も多いようなので、条件から(変数を束縛して)命題をつくるもっと単純な例として

$$x\left(x^2 \geq 0\right)$$

等を簡単に紹介してもよいのではないか。

　昨年度の授業では、通常の命題論理の含意を、教科書で使っていない記号を選んでＰ→Ｑと表すこととし、「Ｐでない」「ＰかつＱ」「ＰまたはＱ」および「Ｐ→Ｑ」の真理表をかき、 $x(\mathrm{p} \to \mathrm{q})$ のことをｐ⇒ｑとかくというように話を進めた。また真理表から、もとの命題と対偶とが同値になることも確認した。しかし、毎年そこまでやるのは大変である。

○必要条件・十分条件について

　ただ、⇒の左側が十分条件、右側が必要条件というだけでは、その意味が生徒に伝わらない。そこで、「きつい条件が十分条件、緩い条件が必要条件」というように話すようにしている。

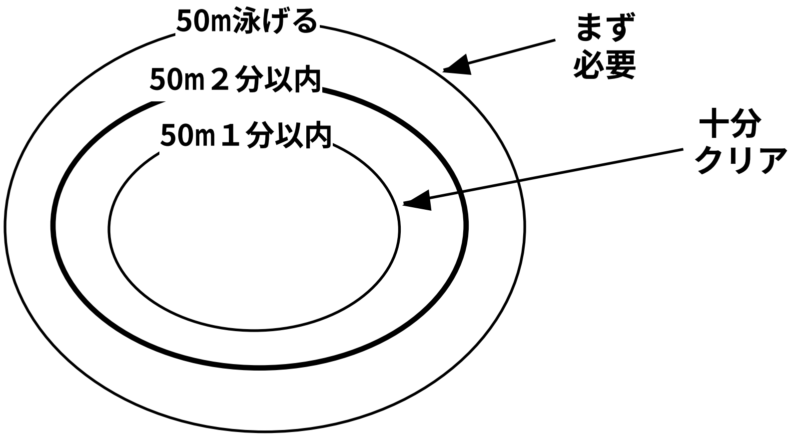
p ⇒ q

p	q
きつい条件	ゆるい条件
十分条件	必要条件

生徒がどっちが必要条件でどっちが十分条件なのか混乱しやすいのは、「十分」という言葉から、「沢山の」つまり緩いほうの条件を連想し、逆に「必要」という言葉から、「必要最小限」すなわちきついほうの条件を連想してしまうためだろう。このような混乱を解消するため、毎年つぎのような例をあげている。

例　ある町内の水泳大会の参加資格が「50mを２分以内で泳げる」という「条件」だった。

・Ａさんは50mを１分以内で泳げるとすると、Ａさんは条件を「十分」クリアしていると言える。
・Ｂさんは50m泳げないとする。すると他の人はＢさんに「まず50m泳げるようになることが『必要』だね」と言うだろう。

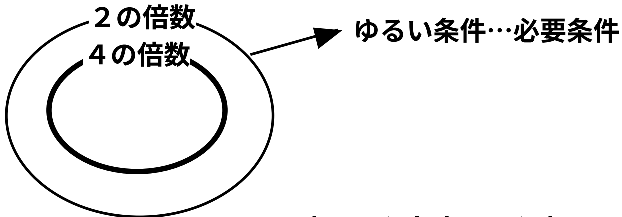


※ここ数年同じ例で授業をしているので、３年理系クラスの問題演習のときに、「必要条件・十分条件って覚えてる？」とたずねたら、「あっ町内水泳大会でしょ」と答えた生徒がいた。

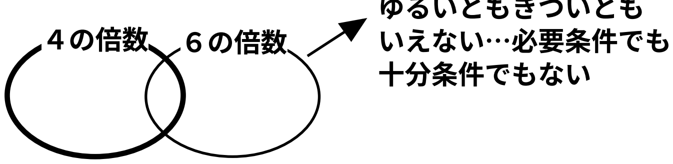
そして、「必要条件か十分条件か」という練習問題を解くときには、いちいちVenn図をかいて考えるように指導している。

練習問題　nを自然数とする。nが４の倍数であるための必要条件はどれか。また十分条件はどれか。

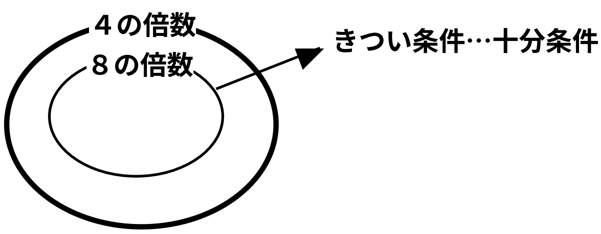
ｐ：nは２の倍数である



ｑ：nは６の倍数である

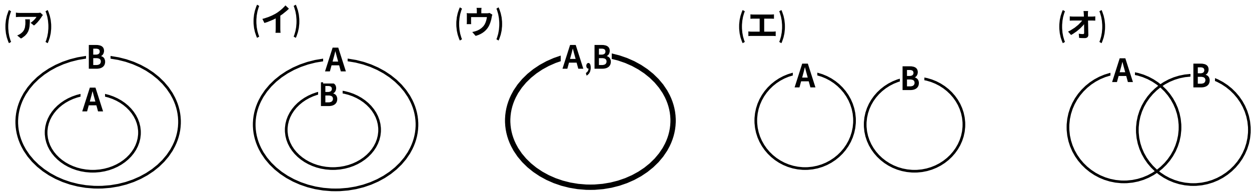


ｒ：nは８の倍数である



(答) 必要条件はｐ、十分条件はｒ

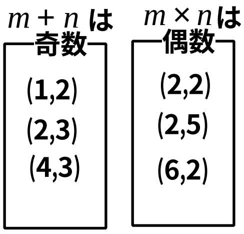
このように、Venn図がかければ、どちらが必要条件でどちらが十分条件なのかはすぐわかるのだが、実際にはなかなかかけない生徒が多い。例えば２つの集合の関係を図で表すと、



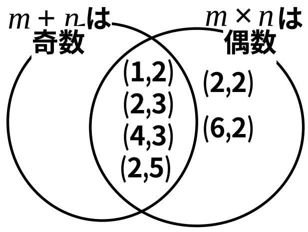
の５つの場合がある。中学までは集合について学んでいない今の生徒は、これらのどの場合に当たるのか判断するのを難しいと感じるようである。そこで、いつも一般の場合(オ)から出発し、例を調べながら(ア)〜(エ)のいずれかに変形できないか考えさせる、以下のような指導法はどうだろうか。

練習問題　m,nを自然数、p：$m+n$ は奇数である、q：$m \times n$ は偶数であるとするとき、次の(a),(b)の中から正しいものを選べ。
(a) pはqの必要条件である。　　(b) pはqの十分条件である。

(1) まず具体例を挙げさせる。

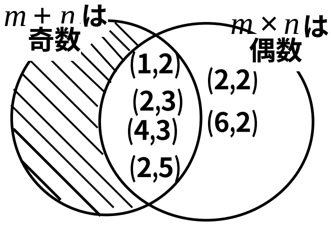


(2) (オ)の形の図に(1)の例を書き込ませる。

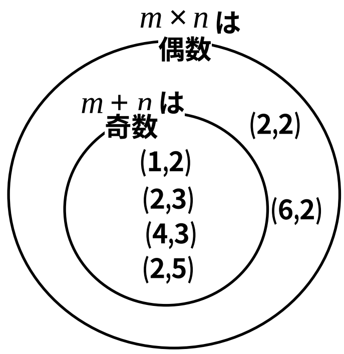


※空白の領域については、本当に空なのか、それとも(1)のなかにたまたまそういう例がなかっただけなのか考えさせ、後者ならば具体例を補っておく。

(3) 空の領域に斜線を書く。



(4) Venn図を変形する。



(答) (b)

※学生時代に論理学者の石本　新先生から伺ったつぎのような話を生徒にも話すことがある。

必要条件という言葉が解りづらいのは、necessary conditionの誤訳で、本当は「必然条件」とすべき。「条件pが成り立っていれば必然的に成り立つ条件」という意味。

(確かに辞書をみると、necessityには「必要性」と訳している用例と「必然性」している用例がほぼ半々あり、例えばlogical necessityは「論理的必然性」となっている。これを「論理的必要性」とするのはあまり適切とはいえないだろう。)

○必要十分条件

必要条件が「ゆるい条件」十分条件が「きつい条件」ならば、必要十分条件は「全く同じ強さの同じ内容の条件」ということになる。その大切さをわかってもらうために、つぎのような例をあげている。

２次方程式を解く例

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$(x-2)(x-3) = 0$$
$$x = 2,\ \ 3$$

中学の頃、２行目や３行目の式の前に「＝」を書いてしまって、先生に注意された人はいないだろうか。３つの式の関係を表すために、式の前に何かを書くとしたら、「⇔」が正しいのである。

$$
\begin{aligned}
& x^2 - 5x + 6 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x-2)(x-3) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x = 2,\ \ 3
\end{aligned}
$$

ここで必要条件だけで式変形を行うと、条件はどんどんゆるくなっていき、２次方程式の解は本当は２個なのに、３個とか４個のような多すぎる誤った答になることがあり得る。また逆に十分条件だけを考えていると条件はどんどんきつくなっていき、解が１個とか０個というまちがった答になるかもしれない。このように数学の問題を解くときには必要十分であるように式を変形することが、きわめて重要なのである。

○命題の逆・裏・対偶

どちらの条件の方がきつくなっても不自然ではないように、
ＡとＢの２つの試験があるときに、Ａに合格⇒Ｂに合格
という命題を例に説明している。

(もとの命題)
Ａに合格⇒Ｂに合格
「Ａの方が難しい」

(逆)
Ｂに合格⇒Ａに合格
「Ｂの方が難しい」

(裏)
Ａに不合格⇒Ｂに不合格
「Ｂの方が難しい」

(対偶)
Ｂに不合格⇒Ａに不合格
「Ａの方が難しい」

こういう例から、「もとの命題と対偶」および「逆と裏」は同じ内容を述べているのだと気づかせる。「⇒の左側が十分条件、右側が必要条件」という言葉遣いに縛られすぎていると、
「ｐ⇒ｑも $\overline{q}\Rightarrow\overline{p}$ も『ｐはｑであるための十分条件』ということを言っているから同値」
というふうにはなかなか言えない。

○(参考)意味論的タブローの方法について

1980年代までは、初心者に論理学を教えるのに、いわゆるヒルベルト流の方法(フレーゲにより始まりいくつかの公理とmodus ponensからなる)と、ゲンツェン流の方法(ＬＫやＮＫ)のどちらかを用いるのがふつうだった。ところが1990年代位から、これらよりもずっと簡単でわかりやすい「真理の木の方法(意味論的タブローの方法)」を用いる教科書が急速に広まってきた。この方法を用いれば、論理学の学習は従来よりもずっとやさしく見通しが良くなる。現在の高校数学での論理の扱いが不十分であると考えている私は、現時点でかなり普及してきているこの「真理の木の方法」を、将来高校でも取り上げ、形式的推論について指導するようになることを期待している。

ここで、真理の木の方法を用いて推論の妥当性をしらべる例をいくつかあげておく。

例１

(a)

(仮定) A∧B
¬A∨C

(結論) C

上の論証は妥当か調べてみよう。
このためには３つの論理式、
Ａ∧Ｂ,¬Ａ∨Ｃ,¬Ｃが同時に真にならないことを確認すればよい。

(1) スタート

A∧B
|
¬A∨C
|
¬C

(2)

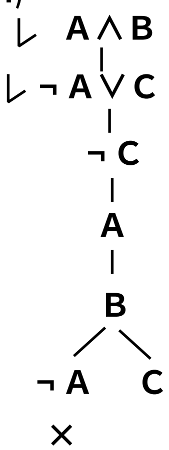
レ A∧B
|
¬A∨C
|
¬C
|
A
|
B

既に使用済みの論理式の前にはレをつける。

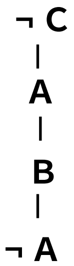
(3)

レ A∧B
|
レ¬A∨C
|
¬C
|
A
|
B
／＼
¬A　C

(4)

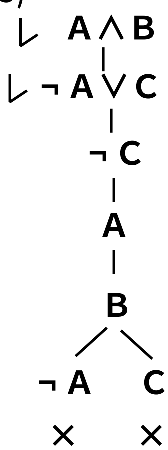


左側の系列は
レ のついた式を除くと



Aと¬Aを含むので
これらの式が同時に真に
なることはない。このよ
うな系列のいちばん下に
×をつける。

(5)

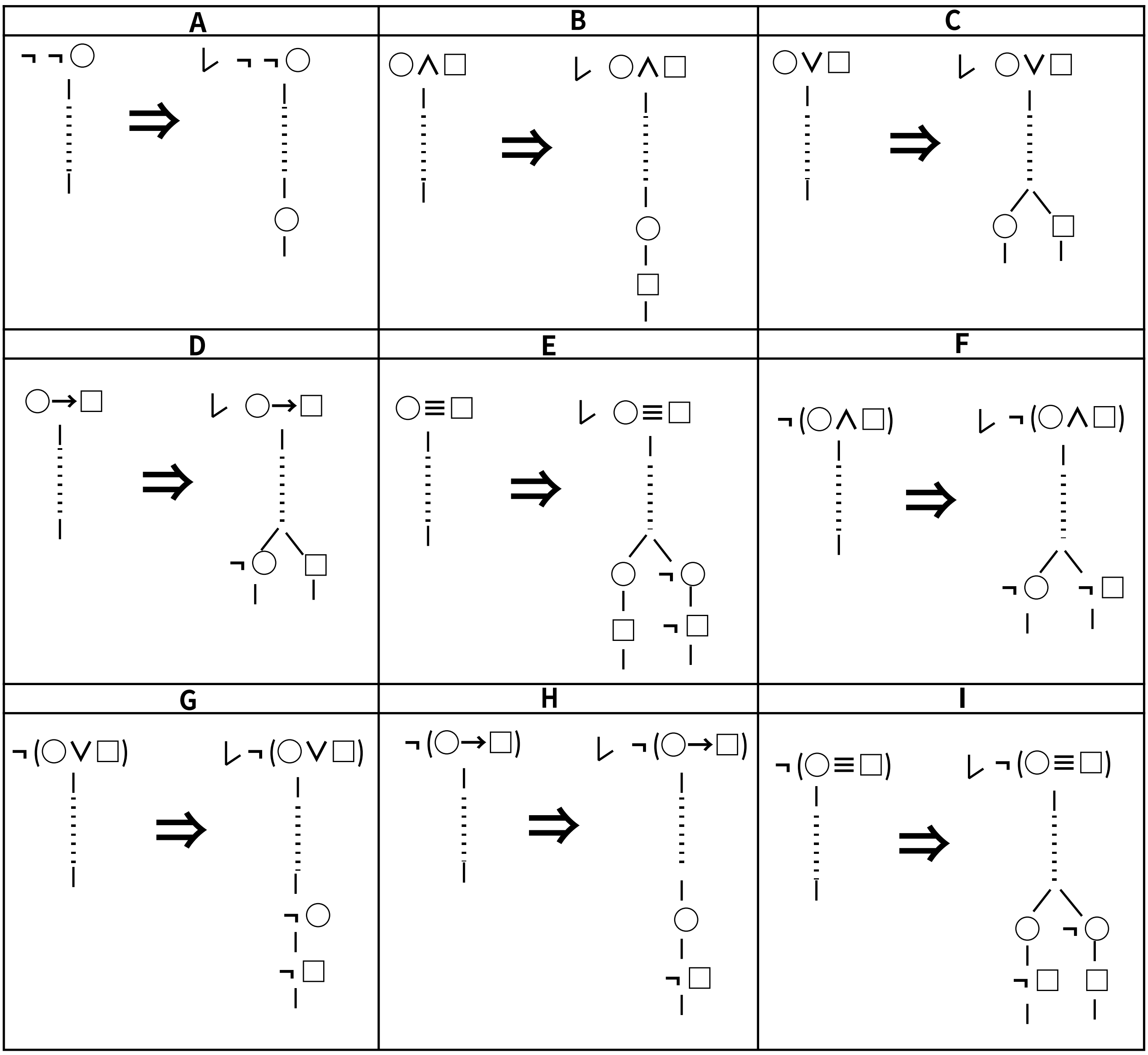


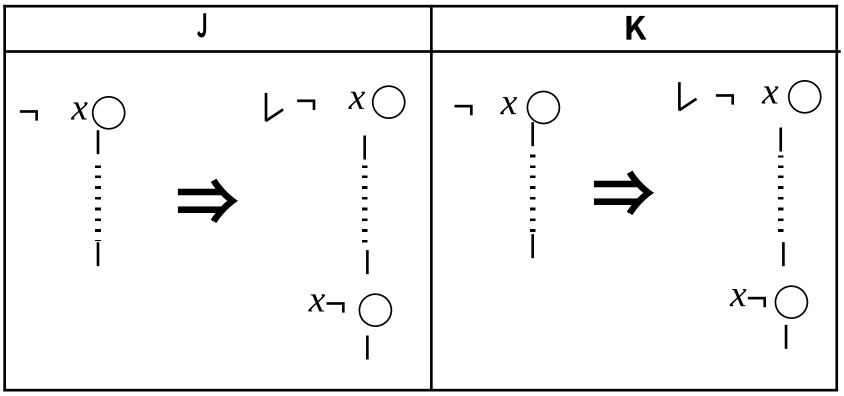
右側の系列の
レ のついた式を除くと

¬CとCをふくむので
(4)と同様にいちばん下に
×をつける。
これで真理の木は完成。

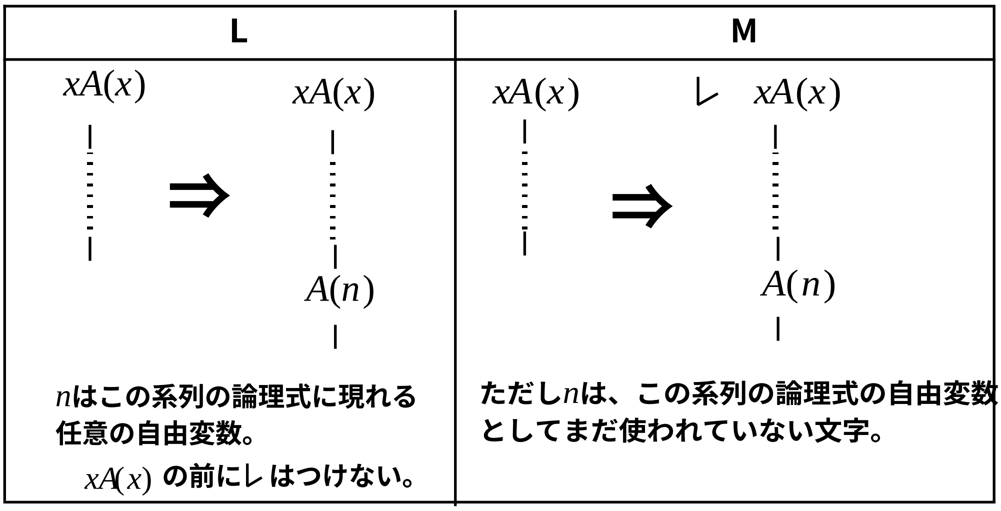
(6) (5)の真理の木を
みると全ての系列の
下に×がついてい
る。よって(1)の３つ
の論理式が同時に真
になることはない。
これから論証(a)は妥
当であることがわ
かった。

(木の作成規則)





また、$A(x)$ をxを自由変数として含む論理式とするとき



例 2

(b) (仮定) A∨B

(結論) A→B

レ A∨B
レ ¬(A→B)
A
¬B
A　B
　　×

いちばん下に×がつかない系列が
あるので、論証(b)は妥当でない。
×のついていない系列はこの論証の
反例を表す。

例 3

(c) (仮定) $x(P(x) \to Q(x))$
$xP(x)$

(結論) $xQ(x)$

$x(P(x) \to Q(x))$
レ $xP(x)$
レ ¬ $xQ(x)$
$x\neg Q(x)$
$P(c)$
$\neg Q(c)$
レ $P(c) \to Q(c)$
$\neg P(c)$　$Q(c)$
×　×

論証(c)は妥当。

　真理の木の方法を用いていれば、ケーニヒの補題から簡単に１階述語論理の完全性を示すことができる。

(参考文献)　R.ジェフリー著　戸田山和久訳　記号論理学　その展望と限界をさぐる[原書第３班]　マグロウヒル　1992